Problema 2:

Se quiere dimensionar una instalación química como la de la figura. Un depósito, incialmente cerrado y aislado térmicamente de volumen V_d, está lleno con un gas (R1) con presión $p_d > p_a$ y densidad ρ_d. A ese depósito llega una canal que está incialmente lleno de otro gas (R2) a la misma presión que la del depósito. La reacción química que tiene lugar entre ellos no genera ni consume calor y, además, tampoco modifica la densidad del gas contenido en ese depósito.
Para que la reacción tenga lugar, es necesario que la presión p_d no varíe en todo el proceso, para lo cual se ha dotado al depósito de una válvula de área A_v por la que saldrán los productos de la reacción. El reactivo 2 se introduce en el depósito empujándolo mediante un émbolo hidráulico. El émbolo, que está incialmente fijo, se mueve por la diferencia de presión entre sus dos caras y no existe resistencia a su movimiento por el canal. Se pretende calcular la altura de fluido H a la que se debe mantener el depósito de líquido de la izquierda para que la presion en el depósito derecho se mantenga constante. Para ello

- Teniendo en cuenta que la masa dentro del depósito no cambia y de que el número de Mach a la entrada del depósito $x = L$ es mucho menor que la unidad $M_L \ll 1$, obtenga la velocidad del gas U_L en esa sección en función del gasto G_v de gas que sale por la válvula.

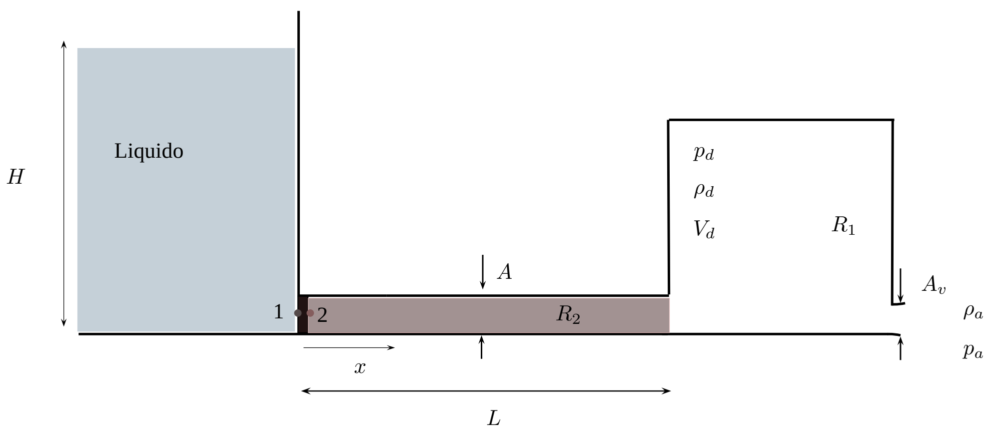
- Escriba la ecuación que permitiría calcular la presión en la cara 2 del émbolo p_2/p_d. Para ello haga uso de la ecuación de cantidad de movimiento del gas teniendo en cuenta que el canal está aislado térmicamente y que no existe rozamiento.

- Velocidad a la que se mueve el émbolo U_e.

- Gasto de gas G_v que sale por la válvula A_v en función de las condiciones dentro del depósito p_d, ρ_d, a_d y del cociente de presiones p_d/p_a.

- Si el movimiento del líquido es casi estacionario, calcule la presión en la cara 1 del émbolo en función de la velocidad U_e y la posición del émbolo x_e. Para ello, tenga en cuenta que existe un coeficiente de fricción λ en la tubería.

- Escriba la ecuación que permitiría calcular la altura de líquido H que es necesaria para que el émbolo se mueva a velocidad constante.



a) $\frac{d}{dt}\left[\rho \cdot V\right] = G - G_v = 0$

$$\boxed{G = G_v}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \cdot \left(e + \frac{u^2}{2}\right) \cdot V\right) = G h_{0L} - G_v \cdot h_d = 0$$

$$h_{0L} = h_d \Rightarrow h_L \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_L^2\right) = h_d$$

$$h_L = h_d \Rightarrow \boxed{T_L = T_d}$$

Como $\begin{matrix} P_L = P_d \\ T_L = T_d \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\rho_L = \rho_d} \longrightarrow G_v = \rho_L \cdot A \cdot U_L \rightarrow \boxed{U_L = \frac{G_v}{\rho_d \cdot A}}$ (1)

b) Ec. CM: para R2 $\quad \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho \cdot \bar{v} \cdot d\tau + \int_{\Sigma} \rho(\bar{v} - \bar{v}_c)\bar{v}\,\bar{n}\,d\sigma = -\int p\,\bar{n}\,d\sigma$ (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{G_v}{A} \cdot (LA - x_e A)\right) + \rho \cdot U_L A \cdot U_L = -(P_d - P_z)A \Rightarrow \frac{G_v}{A}\left(U_L - U_e\right) + \left(P_d - P_z\right) = 0$$

Por otro lado $\quad G_v = \rho_z \cdot U_e \cdot A = \rho_d \cdot U_L\,A$

Canal aislado térmicamente: $\frac{P_z}{\rho_z^\gamma} = \frac{P_d}{\rho_d^\gamma} \Rightarrow P_z = \left(\frac{\rho_z}{\rho_d}\right)^\gamma P_d = \left(\frac{U_L}{U_e}\right)^\gamma \cdot P_d$

sustituyendo en (1) $\rightarrow$ (3) $\quad \boxed{\frac{G_v U_L}{A \cdot P_d}\left(1 - \left(\frac{P_d}{P_z}\right)^{1/\gamma}\right) + 1 - \frac{P_z}{P_d} = 0}$ (2)

c) $\frac{U_e}{U_L} = \frac{\rho_d}{\rho_z} = \left(\frac{P_d}{P_z}\right)^{1/\gamma} \longrightarrow U_e = \frac{G_v}{\rho_d \cdot A}\left(\frac{P_d}{P_z}\right)^{1/\gamma}$ (1)

d) Tobera no bloqueada $\quad G_v = \rho_d \cdot a_d \cdot A_v \cdot \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)^{1/2}\left(\frac{P_d}{P_a}\right)^{-\frac{1+\gamma}{2\gamma}}\left[\left(\frac{P_d}{P_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$ (1)

e) $\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2}\right)} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\lambda U^2}{2D}$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2}\right)} = 0$

$$P_1 - P(x=0) = -\frac{1}{2}\rho \cdot \lambda \cdot \frac{U^2}{2D} x_e$$

$$P(x=0) = P_a + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \cdot U_e^2$$

$$\Rightarrow P_1 - P_a = \rho \cdot g \cdot H - \frac{1}{2}\rho \cdot U_e^2 \cdot \left\{\frac{\lambda x_e}{2D} + 1\right\}$$ (3)

f) émbolo: $\quad M \cdot \frac{dU_e}{dt} = A \cdot \left(P_z - P_1\right) \Rightarrow U_e = cte \rightarrow P_z = P_1$

$$x_e = U_e \cdot t$$

$$P_a + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \cdot U_e^2 \left\{\frac{\lambda U_e}{2D} \cdot t + 1\right\} = P_z \quad \text{con } P_z \text{ dada por (2)}$$

(1)