GEOMETRÍA LINEAL, grupo A

Examen final

Septiembre de 2014

Tiempo: 3 horas

Justifica tus respuestas

(1) (1,5 puntos)

(a) Da la definición de giro en el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.

(b) Sean g_1 y g_2 dos giros de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, ambos de ángulo $\pi/4$. Demuestra que $g_1 \circ g_2$ es un giro de ángulo $\pi/2$.

(2) (1,5 puntos) Di si las siguiente afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando tu respuesta:

(a) Existe un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con exactamente dos puntos fijos.

(b) Existe un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ cuyo completado a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tiene exactamente dos puntos fijos.

(3) (4 puntos) Consideramos en $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ los puntos $p_0 = (1:0:0:0)$, $p_1 = (1:0:1:0)$, $p_2 = (0:1:0:1)$ y $p_3 = (0:0:0:1)$. Sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ en $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ tal que p_0, p_1, p_2 y p_3 son sus únicos puntos fijos.

(a) Halla todos los planos invariantes de f, justificando por qué los planos invariantes que has hallado son todos. ¿Cuántos son?

(b) Halla todas las rectas invariantes de f, justificando por qué las rectas invariantes que has hallado son todas. ¿Cuántas son?

(c) Da un ejemplo concreto de una proyectividad f como la descrita más arriba (es decir, tal que p_0, p_1, p_2 y p_3 sean sus únicos puntos fijos).

(d) Escribe la matriz, con respecto a la referencia canónica de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$, de la proyectividad g que cumple $g(p_i) = p_i$ para todo $i = 0,1,2,3$ y tal que $g((0:1:-1:0)) = (2:1:1:2)$.

(4) (3 puntos) Se considera en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ la cónica C de ecuación

$$X^2 - 4X + Y^2 - 2Y - 3 = 0$$

y los puntos $p_1 = (0,3)$, $p_2 = (4,-1)$, $p_3 = (4,3)$ y $p_4 = (0,-1)$, todos ellos pertenecientes a C.

(a) Clasifica C afínmente.

(b) Determina las rectas tangentes l_1, l_2, l_3 y l_4 a C en p_1, p_2, p_3 y p_4. Comprueba que l_1 es paralela a l_2 y que l_3 es paralela a l_4.

(c) Sea r la recta que pasa por p_1 y p_2 y sea r' la recta que pasa por p_3 y p_4. Demuestra que el punto $q = r \cap r'$ es el polo de la recta del infinito de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.