SOLUCIONES

Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía

Examen de Matemáticas para la Economía 24/06/2011

APELLIDOS:	NOMBRE:	
DNI:	Grado: Finanzas y Contabilidad	Grupo:

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras, teléfonos móviles y, en general, de ninguna clase de aparato electrónico durante la realización del examen.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya escrito en él. Hay dos hojas adicionales para contestar las preguntas.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor con un documento acreditativo oficial.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 0.5 puntos.

1. a) Calcular utilizando las propiedades de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}.$$

b) Resolver la ecuación matricial $AX + B = 2A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) *Denotando mediante r_j la fila j–ésima del determinante, las operaciones $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$ y $r_4 - r_1$ transforman el determinante en*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}.$$

De la misma forma, calculando $r_2 - 3r_1$ y $r_3 - 7r_1$ en el último determinante tenemos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & -14 \\ 0 & -14 & -42 \end{vmatrix} = 6 \times 42 - 14 \times 14 = 56.$$

b) *Dado que A es inversible, tenemos que $X = 2I_2 - A^{-1}B$. Por otra parte,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

luego

$$X = 2I_2 - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, consideramos el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rl} -x + 2y + az &= 2 \\ 2x + \ \ y + 6z &= 2 \\ x - \ \ y \qquad &= 1 \\ 3x \qquad + 6z &= b \end{array}\right\}.$$

a) Discutir el sistema según los valores de a y b.

b) Resolver el sistema cuando sea posible.

Solución: *La matriz aumentada es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & b \end{pmatrix}.$$

Sea r_j su fila j–ésima. Las operaciones r_2+2r_1, r_3+r_2 y r_4+3r_1 permiten obtener la matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 5 & 6+2a & 6 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 6 & 6+3a & b+6 \end{pmatrix}.$$

Intercambiando r_2 con r_3 obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 5 & 6+2a & 6 \\ 0 & 6 & 6+3a & b+6 \end{pmatrix}.$$

Sobre esta matriz calculamos $r_3 - 5r_2$ y $r_4 - 6r_2$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 6-3a & -9 \\ 0 & 0 & 6-3a & b-12 \end{pmatrix}$$

y finalmente, $r_4 - r_3$ da la matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 6-3a & -9 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$$

a) *Claramente, el sistema no tiene solución cuando $b \neq 3$, porque el rango de la matriz del sistema is menor que el rango de la matriz aumentada. Cuando $b = 3$ tenemos dos casos: $a \neq 2$ y $a = 2$. En el primer caso el rango de ambas matrices coincide con el númerod e variables, luego existe una única solución. En el segundo caso el rango de la matriz del sistema es menor que el rango de la matriz aumentada, por lo que no hay solución.*

b) *La solución existe y es única en el caso $b = 3$ y $a \neq 2$. Resolviendo el sistema triangular equivalente obtenemos fácilmente*

$$z = \frac{9}{3a-6}, \quad y = \frac{18}{6-3a}, \quad x = \frac{8-a}{2-a}.$$

3. Se considera la función
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2-x}.$$

a) Determinar el dominio y las asíntotas verticales de f. Demostrar analíticamente que $-2 \notin \mathrm{Im}(f)$.

b) Calcular las asíntotas horizontales y oblicuas de f.

Solución:

a) Dom$f = \mathbb{R} - \{2\}$ *y* $x = 2$ *es la única asíntota vertical, dado que*
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{(x-1)^2}{2-x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-1)^2}{2-x} = -\infty.$$
Si se supone que $-2 \in \mathrm{Im}(f)$, *entonces* $-2 = f(x)$ *para algún* x, *luego se tendría la siguiente igualdad*
$$-2 = \frac{(x-1)^2}{2-x} \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0.$$
Pero esta ecuación cuadrática no tiene soluciones, dado que su discriminante, $(-4)^2 - 4 \times 5 = -4$, *es negativo.*

b) *La función tiene una asíntota oblicua* $y = mx + n$, *donde*
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x(2-x)} = -1$$
y
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{2-x} - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{2-x} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2-x} = 0.$$
Luego $y = -x$ *es una asíntota oblicua. No hay asíntotas horizontales*

4. Se considera la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|, & \text{si } x \leq 1; \\ ax^2 + b, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

a) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) *La función es continua en los puntos* $x \neq 1$*. Los límites laterales en en punto* $x = 1$ *son 2 (izquierda) y* $a + b$ *(derecha) que son iguales y coinciden con* $f(1)$ *sii* $a + b = 2$*. Por tanto,* f *es continua en* $x = 1$ *sii* $a + b = 2$*.*

b) *La función es derivable en todo punto* $x \neq 1$ *y* $x \neq 0$*, independientemente de los valores de* a *y* b*. No es diferenciable en* $x = 0$ *porque* $|x|$ *tiene un pico en* $x = 0$*. Asumiendo que* $a + b = 2$*, las derivadas laterales en el punto* $x = 1$ *valen 2 (izquierda) y* $2a$ *(derecha), luego* f *es derivable en sii* $a + b = 2$ *y* $2a = 2$*, es decir, sii* $a = 1$ *y* $b = 1$*.*

5. Se considera la función
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2-x}.$$

a) Calcular los intervalos en los que f es creciente/decreciente y encontrar los máximos y mínimos locales de f en $\mathbb{R}$.

b) Calcular los extremos globales o absolutos de f en el intervalo $[0, \frac{3}{2}]$.

Solución:

a) *La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$. La derivada es*
$$f'(x) = \frac{2(x-1)(2-x)+(x-1)^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2},$$
que se anula en los puntos donde $-x^2+4x-3 = 0$, es decir, en $x = 1$ y $x = 3$. Para estudiar la monotonía de f necesitamos dividir $\mathbb{R}$ en los siguinetes intervalos: $I_1 = (-\infty, 1)$, $I_2 = (1, 2)$, $I_3 = (2, 3)$ y $I_4 = (3, \infty)$ y estudiar el signo de f' en cada uno de ellos.
En I_1, $f' < 0$ ($f'(0) < 0$), en I_2, $f' > 0$ ($f'(3/2) > 0$), en I_3, $f' > 0$ ($f'(5/2) > 0$) y en I_4, $f' < 0$ ($f'(4) < 0$). Por tanto, podemos concluir qye f is decreciente en I_1 y en I_4, y creciente en I_2 y en I_3, luego $x = 1$ es un mínimo local y $x = 3$ es un máximo local. Notamos que f no tiene extremos globales.

b) *Dado que la función es continua en el intervalo cerrado y acotado $[0, 3/2]$, podemos asegurar, por el Teorema de Weierstrass que existen extremos globales. Por el apartado a) anterior, $x = 1$ es mínimo local de f y pertenece a $[0, 3/2]$, mientras que $3 \notin [0, 3/2]$. Luego, los únicos candidatos son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3/2$. Evaluando f en estos puntos tenemos $f(0) = 1/2$, $f(1) = 0$, y $f(3/2) = 1/2$ y por tanto $x = 0$ y $x = 3/2$ son máximos globales de f y $x = 1$ es el mínimo global en el intervalo $[0, 3/2]$.*

6. a) Halla las integrales siguientes:

$$\text{(i)} \int \frac{3x^4}{1+x^5}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int xe^x\,dx.$$

b) Halla el área de la región acotada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 8 - x^2$.

Solución:

a) *(i) es inmediata:* $\frac{5}{3}\ln(1+x^5) + C$ *(puede hacerse el cambio de variable* $t = x^5$*); (ii)* $e^x(x-1) + C$ *(por partes,* $u = x$, $dv = e^x\,dx$*).*

b) *Las gráficas de* f *y* g *se cortan en los puntos* x *tales que* $f(x) = g(x)$*, es decir, cuando* $x^2 = 8 - x^2$*, o* $x = \pm 2$*. Dado que* $f(0) = 0 < 8 = g(0)$*,* $g(x) \geq f(x)$ *en el intervalo de integración* $[-2, 2]$*. Por definición, el área es*

$$\int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2\,dx = 8x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}\,u^2.$$