GEOMETRÍA LINEAL, grupo A

Examen final, primera parte

14 de febrero de 2014

Tiempo: 1 hora y 15 minutos

Justifica tus respuestas

1) (2 puntos)

(a) Define aplicación afín e isomorfismo afín.

(b) Define isometría. Da un ejemplo de un isomorfismo afín del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que no sea isometría.

(c) Demuestra que un isomorfismo afín transforma rectas en rectas y rectas paralelas en rectas paralelas.

(d) Demuestra que una isometría del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ transforma rectas en rectas y rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.

2) (1 punto) En $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ denotamos por l_0 a la recta de ecuación $x_0 = 0$. Dada una recta cualquiera l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, identificamos $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus l$ con $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ de la siguiente forma:

(i) Fijamos una proyectividad f de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $f(l_0) = l$.

(ii) definimos la aplicación inyectiva $j = f \circ i$, donde i es la aplicación

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \hookrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \\ & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y)\,. \end{array}$$

(iii) Para todo punto $(x, y) \in \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, identificamos (x, y) con $j(x, y)$.

Consideramos los puntos $p_1 = (0 : 1 : 1)$, $p_2 = (1 : 1 : 1)$, $p_3 = (1 : 1 : 1/2)$ y $p_4 = (1 : 2 : 1)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. Encuentra una recta l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tal que p_1, p_2, p_3, p_4 sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

GEOMETRÍA LINEAL, grupo A

Examen final, segunda parte

14 de febrero de 2014

Tiempo: 2 horas y 45 minutos

Justifica tus respuestas

3) (5 puntos) Consideramos la proyectividad

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{P}^3_{\mathbf{C}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^3_{\mathbf{C}} \\ & (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto & (x_0 : -2x_0 + 3x_1 : x_2 : -x_0 + x_1 + 2x_2 + 3x_3). \end{array}$$

Sea Π es plano de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ de ecuación $x_0 - x_1 = 0$.

(a) Halla los puntos fijos de f.

(b) Halla los planos invariantes de f.

(c) Encuentra todas las rectas invariantes de f contenidas en Π. Encuentra el resto de rectas invariantes de f.

(d) Halla un sistema de referencia proyectivo $\mathscr{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3; p_4\}$ de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ respecto del cual la matriz de f sea de la forma

$$M_{\mathscr{R}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Indicación: busca primero p_0, p_1 y p_2 y toma $p_3 = (0 : 1 : 0 : 0)$.

(e) ¿Es f el completado proyectivo de una proyección afín? ¿Es f el completado proyectivo de una traslación?

4) (2 puntos) Consideramos la cónica C de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x^2 + 4xy + y^2 - x - y = 0$ y la cónica D de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 - x_0x_2 = 0$.

(a) ¿Qué tipo de cónica proyectiva es D? ¿Qué tipo de cónica afín es C? Halla el centro de C.

(b) Halla las tangentes a C que pasan por el punto $(1/2, -1/2)$.

Indicación: recuerda que una recta l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es tangente a C en un punto p del lugar de ceros de C si el completado proyectivo $\overline{l}$ de f es la tangente a $\overline{C}$ en el punto $i(p)$, donde i es la aplicación

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \hookrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \\ & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y). \end{array}$$