EXAMEN ANÁLISIS MATEMÁTICO
Grado en Económicas
ENERO 2015.

NOMBRE:
APELLIDOS:
D.N.I:
GRUPO:

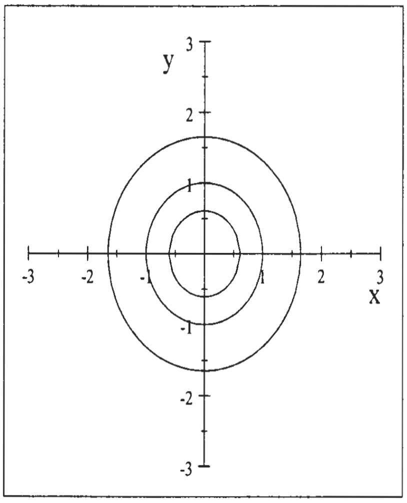
La duración del examen es de 2 horas y media.
No se permite el uso de calculadoras.
Marque las **respuestas** a las **cuestiones** en el **cuadro** indicado.

CUESTIONES

En **el siguiente cuadro marque** las opciones correctas a las cuestiones planteadas:

RESPUESTAS	**A**				**LAS**	**CUESTIONES**			
Cuestión 1:	(a)	(b)	(c)	(d)	Cuestión 4:	(a)	(b)	(c)	(d)
Cuestión 2:	(a)	(b)	(c)	(d)	Cuestión 5:	(a)	(b)	(c)	(d)
Cuestión 3:	(a)	(b)	(c)	(d)					

1. **(0.6 puntos)** Las curvas de nivel dibujadas en el siguiente gráfico corresponden a la función:



(a) $f(x,y) = -3(x-6)^2 + 7y^2$
(b) $f(x,y) = x + y$
(c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
(d) $f(x,y) = \ln x^2y^2$

2. **(0.6 puntos)** Sea $f(x,y) = \frac{3x+y}{x+y}$. Entonces se verifica que:

(a) $f(x,y)$ es homogénea de grado 1. (c) Su dominio es $\mathbb{R}^2$.
(b) $f(x,y)$ no es homogénea. (d) $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

3. **(0.6 puntos)** Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$p_1(x,y) = x - 2y + 3$$

es su polinomio de Taylor de orden uno en $(0,0)$, entonces se verifica que:

(a) $f(0,0) = 0$ (c) $\nabla f(0,0) = (-2,1)$
(b) $\nabla f(0,0) = (1,-2)$ (d) $f(0,0) = 3$

4. **(0.6 puntos)** Si $f(x,y)$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(x,y) = (-2,-2)$ para todo $(x,y) \in$Dom(f), se verifica que,
   (a) $f(x,y)$ es una función constante.
   (b) Las derivadas parciales de $f(x,y)$ tienen el mismo signo para todo $(x,y) \in$Dom(f).
   (c) $f(x,y)$ es una función decreciente en x así como en y.
   (d) $f(x,y)$ es una función creciente en x así como en y.

5. **(0.6 puntos)** Sea $D(m,p)$ una función que proporciona la demanda D de cierto bien conocido el precio p de dicho bien y la renta m. Si $D(m,p)$ es una función con derivadas parciales hasta de segundo orden continuas tal que $\nabla D(7,1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ y $HD(7,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Se verifica que,
   (a) $.\frac{\partial^2 D}{\partial m \partial p}(m,p) > \frac{\partial^2 D}{\partial p \partial m}(m,p)$ si la renta es suficientemente grande.
   (b) Si estando en el punto $(7,1)$ la renta aumenta ligeramente entonces la demanda disminuye y esta disminución es, en valor absoluto, mayor cuanto mayor es la renta.
   (c) $\frac{\partial^2 D}{\partial m \partial p}(m,p) = \frac{\partial^2 D}{\partial p \partial m}(m,p)$ para todo $(m,p) \in$Dom(D)
   (d) Si estando en el punto $(7,1)$ la renta aumenta ligeramente entonces la demanda aumenta.

PROBLEMAS

---

1. **(1 punto)** Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de la función
$$f(x,y) = e^x + x^2 \ln(y^2)$$
en un punto cualquiera $(x,y) \in$Dom(f) así como en el punto $(0,1)$.

2. **(1 punto)** Determine, analítica y gráficamente, el dominio y las curvas de nivel para los niveles $k = \{1,4\}$ de la función
$$f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y.$$

3. El precio medio del litro de gasóleo en la comunidad de Madrid depende del coste en dólares del barril de petróleo de referencia, x, así como del margen medio de distribución de las gasolineras, y, medido en porcentaje, vía una función $P(x,y)$ que tiene derivadas parciales continuas para todo $x, y \geq 0$. En la actualidad el precio medio del litro de gasóleo es de $1'35$ euros con un coste del barril de referencia de $x_0 = 70'3$ dólares y un margen medio de distribución de $y_0 = 13\%$, es decir, $P(70'3, 13) = 1'35$. Además, se sabe que el gradiente de esta función en la actualidad es $\nabla P(70'3, 13) = (0'01, 0'05)$.

   (a) Compruebe que, en la situación actual, el coste del barril de petróleo x permite definir el margen de explotación y mediante una función diferenciable $y = f(x)$ para los puntos la curva de nivel $P(x,y) = 1'35$ en un entorno del punto $(70'3, 13)$. **(1 punto)**
   (b) Si el coste del barril de referencia pasa a ser de $x = 69'5$ dólares el barril y el precio del litro de combustible se mantiene en $1'35$ litros, ¿cuál sería el valor aproximado del margen de explotación de las gasolineras y? **(1 punto)**
   (c) Es conocido que el coste del barril de referencia depende de la producción diaria de barriles de petróleo, q, que fija la OPEP, vía una función derivable $x(q)$. En la actualidad la producción diaria es de $q_0 = 30$ millones de barriles diarios determinando el coste de $70'3$ dólares el barril, es decir $x(30) = 70'3$. Sabemos adicionalmente que $\frac{dx}{dq}(30) = -0'5$. Determine la marginal del precio medio del litro de gasóleo con respecto a q para $q_0 = 30$ millones de barriles al día, es decir, calcule $\frac{\partial P}{\partial q}(30, 13)$. **(1 punto)**

4. La función de costes marginales de una empresa depende del número de unidades x producidas y viene dada por
$$CM(x) = \begin{cases} 5 \text{ si } 0 < x \leq 8 \\ \frac{15}{\sqrt{1+x}} \text{ si } x > 8 \end{cases}.$$
   (a) Calcule la función de costes $C(x) = \int_0^x CM(t)dt$. **(0.75 puntos)**
   (b) ¿Es la función de costes $C(x)$ continua? ¿Es derivable? Justifique su respuesta. **(0.75 puntos)**
   (c) ¿Se mantienen los costes $C(x)$ acotados cuando $x \to \infty$? (**Indicación**: Estudie la convergencia de $\int_8^\infty \frac{15}{\sqrt{1+x}}dx$.). **(0.5 puntos)**