

### Álgebra Lineal. Grupo B. 12/02/2013

Duración: 3 horas.

Todas las preguntas valen igual. Cuando uses enunciados o definiciones vistos en clase, explícalo clara y concisamente.

1. Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal entre espacios vectoriales  $V, V'$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Demostrar que  $f$  es inyectiva si y solo si el núcleo de  $f$  es nulo.
2. Demostrar que el producto vectorial es antisimétrico: i.e., para  $v, w \in \mathbb{R}^3$  es  $v \wedge w = -(w \wedge v)$ .
3. Demostrar que derivar polinomios es una aplicación lineal

$$D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], p(x) \mapsto p'(x).$$

Dar un ejemplo de una forma lineal definida en  $\mathbb{R}[x]$ .

4. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$ , hallar una matriz regular  $Q$  tal que  $QA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

5. Sean  $u, v$  vectores unitarios en un espacio euclídeo de dimensión  $n \geq 2$  que forman un ángulo de  $\pi/3$ . Calcular la norma de  $2u + v$  y el ángulo que forman  $-u$  y  $2u + v$ . Hacer una representación gráfica.

6. En el espacio  $\mathbb{R}_2[x]$  de los polinomios reales en una variable de grado menor o igual que dos, se considera el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

A partir de la base  $B = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ , obtener una base ortonormal, mediante el método de Gram-Schmidt.

7. En  $\mathbb{R}^3$  se considera el subespacio  $U$  dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

¿Existe un subespacio  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  tal que  $U \cap W = \{0\}$  y  $U + W$  está dado por  $x + y + z = 0$ ? En caso afirmativo, hallar todos los posibles  $W$ . Hacer una representación gráfica de  $U, W$  y de  $\mathbb{R}^3/U$ .

8. Se considera la aplicación lineal  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$  dada por

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= v_1 + iv_2 \\ f(u_1 + u_3) &= v_1 + iv_2 \\ f(u_2 + u_3) &= v_1 \end{aligned}$$

donde  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $B' = \{v_1, v_2\}$  es base de  $\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2$  respectivamente. Hallar la matriz de  $f$  respecto de  $B$  y  $B'$ . Hallar bases del núcleo y de la imagen de  $f$ . ¿Es  $f$  suprayectiva?

9. Hallar todas las aplicaciones lineales  $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  tales que  $\ker f = \text{im } f$ . [Indicación: ¿cómo es una matriz asociada a  $f$  respecto de una base dada?]