Apellidos y nombre:

Análisis Matemático
Prueba de evaluación 1 (Temas 0,1,2) 11-10-2016

Duración de esta prueba: 60 minutos.

Es necesario entregar la AA1 **COMPLETAMENTE** resuelta (escrita a mano y con el nombre) para que se corrija esta prueba.

Test (30 %)

En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta. Poner la letra elegida en la casilla correspondiente.

Calificación del test: respuesta acertada = +0.3, justificación correcta = +0.3.

1. El valor del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+4y^4}}$$

(a) No existe

(b) Es $-1/2$

(c) Es 0

A

Justifica la respuesta: El límite doble no existe porque los límites iterados son diferentes $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+4y^4}}\right)=0$, mientras que $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+4y^4}}\right)=-\frac{1}{2}$.

2. La curva de nivel $F(x,y)=1$ para la función $F(x,y)=y^2+x^2-1$ es

(a) Una hipérbola

(b) Una circunferencia

(c) Una parábola

B

Justifica la respuesta: $F(x,y)=1$ equivale a $x^2+y^2=2$, que es la ecuación de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$.

3. La integral $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|dx$ vale

(a) 0

(b) 1

(c) 2

C

Justifica la respuesta: Como la función $f(x)=|\operatorname{sen}(x)|$ es par y coincide con $\operatorname{sen}(x)$ en $[0,\pi/2]$, se verifica que $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\operatorname{sen}(x)|\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx = 2[-\cos(x)]_0^{\pi/2}=2$.

4. La derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \cos(t^2)dt$ es

(a) $2x\cos(x^4)$

(b) $-\mathrm{sen}(x^4)$

(c) $\cos(x^2)$

A

Justifica la respuesta: Como $\cos(x^2)$ es continua y x^2 es derivable, usando el Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de la cadena, se obtiene $F'(x) = \cos(x^4)2x$.

---

5. El valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x^3 e^{-x^2}\,dx$ es

(a) $\Gamma(3)$

(b) 1

(c) $2\cdot\Gamma(2)$

B

Justifica la respuesta: Si en la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x^3 e^{-x^2}\,dx$ hacemos el cambio $x^2 = t$, es decir $x = \sqrt{t}$ y $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, queda $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x^3 e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} 2(\sqrt{t})^3 e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} te^{-t}\,dt = \Gamma(2) = 1.$

Teoría (10 %)

Dada una función de dos variables $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y un punto $(a,b) \in D$,

- Definir la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

- Si f es diferenciable en el punto (a,b), escribir la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (a,b)
El plano tangente es el que tiene por ecuación

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial xy}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Cuestión 1 (12%)

Consideramos la función $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$. Calcular sus puntos críticos y decidir si son máximos, mínimos o puntos de silla.

Como f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, los puntos críticos serán los que anulen las dos derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Luego los puntos críticos deben verificar $\{3x^2 - 3y = 0, 3y^2 - 3x = 0\}$.

De $3x^2 - 3y = 0$, se obtiene $y = x^2$ y sustituyendo en la segunda ecuación $x^4 - x = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. Luego hay dos puntos críticos: $(0,0)$ y $(1,1)$.

Para clasificarlos calculamos la derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

Por tanto la matriz hesssiana en el punto $(0,0)$ es $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Como el determinante de esta matriz es $-9 < 0$, se puede asegurar que <u>en $(0,0)$ hay un punto de silla</u>.

Por otra parte, $H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Como el determinante de esta matriz es $27 > 0$, y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$, se puede asegurar que <u>en $(1,1)$ hay un mínimo relativo</u>.

Cuestión 2 (13 %)

Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias. En el caso de que sean convergentes, calcular su valor.

$$\text{a)} \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3} \qquad\qquad \text{b)} \int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x}$$

a) La función $\dfrac{1}{x(\ln x)^3}$ es continua, y por tanto integrable, en cualquier intervalo $[e,b]$, con $b > e$.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{1}{x}(\ln x)^{-3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{2(\ln x)^2}\right]_e^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{2(\ln M)^2}\right) + \frac{1}{2} = +\frac{1}{2}$$

Por tanto la integral impropia es convergente y su valor es $1/2$.

b) La función $\dfrac{1}{x(\ln x)}$ es continua, y por tanto integrable, en cualquier intervalo $[e,b]$, con $b > e$.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)} = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)} = \lim_{b\to\infty} [\ln(\ln x)]_e^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty$$

Por tanto la integral impropia es divergente.

Problema 1 (25 %)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x+2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

se define $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

(a) (2 puntos) Hallar $F(1)$ y $F(2)$.

$F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 te^t\,dt$

Se halla una primitiva de te^t mediante el método de integración por partes ($u = t, dv = e^t$):

$\displaystyle\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = (t-1)e^t$.

Aplicando la regla de Barrow: $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt = \left[(t-1)e^t\right]_0^1 = 0 - (-e^0) = 1$.

Por tanto, $F(1) = 1$.

Para hallar $F(2)$ hay que tener en cuenta que $f(x)$ está definida de dos formas diferentes en el intervalo $[0, 2]$. Por tanto:

$$F(2) = \int_0^2 f(t)\,dt) = \int_0^1 te^t\,dt + \int_1^2 \frac{1}{t+2}\,dt = 1 + [\ln(t+2)]_1^2 = 1 + \ln(4) - \ln(3) = 1 + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Se tiene que $F(2) = 1 + \ln(\frac{4}{3})$.

(b) (3 puntos) Justificar que $F(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y estudiar su derivabilidad.

La función f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, puesto que:

- xe^x es continua en $(-\infty, 1)$,
- $\frac{1}{x+2}$ es continua en $(1, +\infty)$,
- f no es continua en $x = 1$ puesto que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} xe^x = e \neq \frac{1}{3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+2} = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Por tanto:

- $F(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que $f(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$ (tiene sólo un punto de discontinuidad y está acotada en cualquier intervalo cerrado).
- $F(x)$ es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ y en dichos puntos $F'(x) = f(x)$ (por el Teorema Fundamental del Cálculo).

(c) (5 puntos) Hallar la expresión explícita de $F(x)$.

La expresión explícita de F hay que calcularla en los distintos tramos en los que está definida $f(x)$:

- Si $x \leq 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x te^t\,dt = \left[(t-1)e^t\right]_0^x = (x-1)e^x + 1$.
- Si $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 te^t\,dt + \int_1^x \frac{1}{t+2}\,dt = F(1) + [\ln(t+2)]_1^x = 1 + \ln(x+2) - \ln(3)$. Por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)e^x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \ln(\frac{x+2}{3}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Apellidos:
Nombre:

Análisis Matemático. Prueba EC1. 11-10-2016 - Parte2A

Tiempo para esta parte del examen: 25 **minutos.**

Problema 2 (5%)

Define y dibuja con Maxima la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x\, e^{-0.3x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

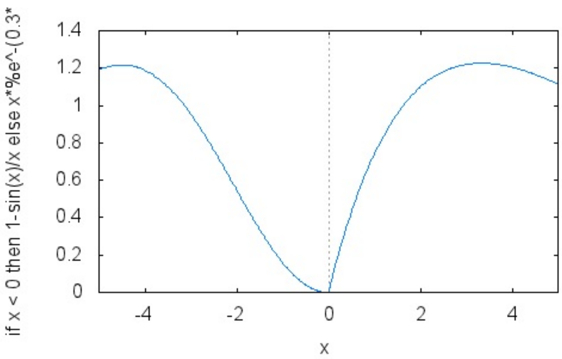
(a) *(3 puntos)* Esboza la gráfica obtenida, ¿hay algún punto de punto de discontinuidad?, ¿y de no derivabilidad?

La función se define en Maxima con la instrucción

```
f(x):=if x<0 then 1-sin(x)/x else x*exp(-0.3*x);
```

Y se dibuja usando el botón de gráficos 2D.

La gráfica de $f(x)$ en el intervalo [-5,5] es:



No hay ningún punto de discontinuidad y hay un único punto de no derivablidad en $x = 0$.

(b) *(4 puntos)* Indica los siguientes valores: $f(-1)$, $f(0)$, $f'(5)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Sin más que evaluar con Maxima se obtiene:

$f(-1) = 1 - \sin(1) \approx 0.1585290151921$, $f(0) = 0$.

Para obtener $f'(5)$, hay que derivar la expresión $x\, e^{-0.3x}$ y sustituir x por 5.

La derivada es $e^{-0.3x} - 0.3xe^{-0.3x}$ y $f'(5) \approx -0.11156508007421$

Finalmente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(c) *(3 puntos)* Encuentra dos números reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo x del intervalo $[-1, 1]$.

Sin más que mirar en la gráfica se puede ver que $0 \leq f(x) \leq 1.4$ para todo x del intervalo $[-1, 1]$. Luego se puede tomar $m = 0$ y $M = 1.4$.

Problema 3 (5%)

Una empresa turística ofrece un viaje de grupo. El número mínimo de personas que debe tener el grupo para que el viaje se organice es 30. Si el grupo tiene exactamente 30 personas, cada una deberá pagar 25 euros. Pero, como el autobús tiene 50 plazas, la empresa hace la siguiente oferta: si hay más de 30 pasajeros, se hará un descuento a todos de 50 céntimos por cada persona que pase de los 30 (por ejemplo si son 32, se descuenta un euro y cada uno paga 24, en lugar de 25). Determina el número de personas que debe tener el grupo para que la recaudación obtenida por el importe de los billetes sea máxima y calcula el importe total correspondiente.

La recaudación obtenida será el producto del número de pasajeros multiplicado por el precio que cada uno de ellos paga por el billete.

Si $x \geq 30$ es el número de pasajeros, cada uno pagará por el billete $25 - 0.5(x - 30)$ euros y la recaudación de la empresa sera $G(x) = x(25 - 0.5(x - 30))$.

Hay que hallar el valor máximo de $G(x)$ para $x \in [30, 50]$.

Derivando se obtiene $G'(x) = -0.5x - 0.5(x - 30) + 25$. Resolviendo, a mano o con el comando resolver de Maxima, la ecuación $-0.5x - 0.5(x - 30) + 25 = 0$ se obtiene $x = 40$.

Para determinar el máximo evaluamos la función G en el punto crítico $x = 40$ y en los extremos del intervalo $x = 30$ y $x = 50$

Ejecutando

```
[G(30), G(40), G(50)];
```

Se obtiene $[750, 800, 750]$

De donde se deduce que la máxima recaudación es 800 euros, que se consigue con 40 pasajeros.