Ingeniería de Fluidos **21/11/2011**

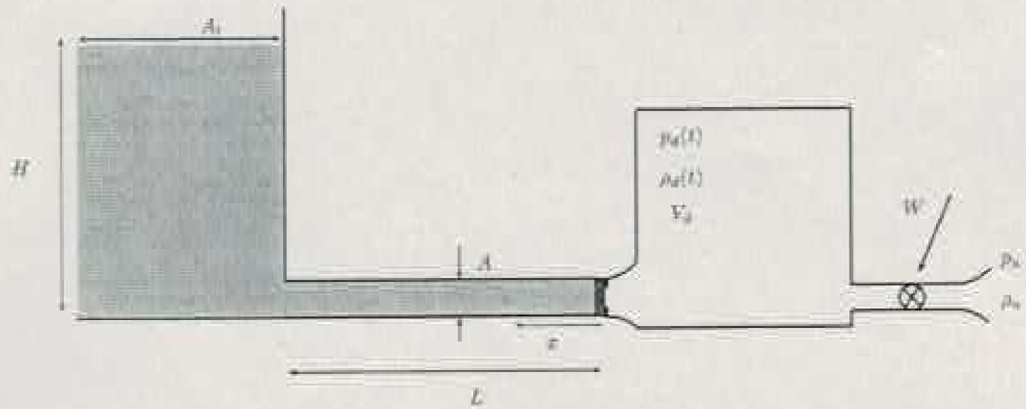
La figura representa dos depósitos de volumen $V_l = A_l H$ y V_d unidos por una tubería de longitud L y área A que inicialmente está llena de líquido. El depósito de la izquierda está lleno hasta una altura $H \gg A^{1/2}$ con un líquido con densidad ρ_l. El depósito de la derecha, que está aislado térmicamente, está lleno de un gas que inicialmente tiene una presión y una densidad p_a y ρ_a. Ambos depósitos están separados por un émbolo de masa m_e que puede moverse en la dirección del depósito de líquido. Si en $t = 0$ el compresor comienza a introducir un gasto G conocido en el depósito de la derecha.

1. Obtenga el instante de tiempo en el que el émbolo empieza a moverse y la potencia de la bomba W que es necesaria para que eso ocurra.

2. Obtenga el sistema de ecuaciones que permite obtener la presión del depósito y la velocidad de movimiento del émbolo $v_e = dx_e/dt$ si la bomba sigue introduciendo un gasto G de gas en el depósito de la derecha. Asuma que $v_e At/A_l \ll H$ para todo t.

3. Resuelva el sistema anterior en el caso $x_e/L \ll 1$. Obtenga el valor de la sobrepresión máxima alcanzada en el líquido en función del tiempo.

4. Si en un instante dado la potencia del compresor alcanza su valor máximo W_{max}, obtenga la velocidad de movimiento del émbolo y la relación entre las presiones a ambos lados del mismo



① Compresor: $w = G \cdot h_a \left[\left(\frac{p_d}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

Ec. energía gas: $\frac{d}{dt}\left(\frac{p_d}{p_a}\frac{V_d}{\gamma-1}\right) = \frac{G \cdot h_a}{p_a}\left(\frac{p_d}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

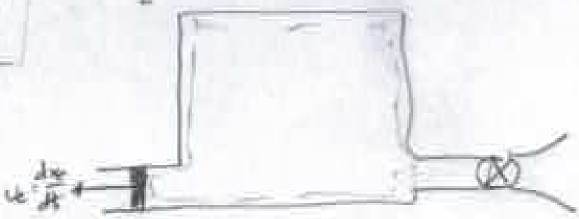
$$\pi = \frac{p_d}{p_a} \Rightarrow \frac{d\pi}{dt} = \frac{G \cdot h_a}{p_a \cdot V_d}(\gamma-1)\,\pi^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$\pi^{1/\gamma} - 1 = \frac{G\, h_a}{p_a V_d}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\, t$$

Líquido: $p_l = p_a + \rho_l g H$

$\pi_{l_0} = \frac{p_l}{p_a} = 1 + \frac{\rho_l g H}{p_a}$ $\Big\} \Rightarrow \pi = \pi_{l_0}$ $\boxed{t_c = \left(\pi_{l_0}^{1/\gamma} - 1\right) \cdot \frac{p_a \cdot V_d}{G \cdot h_a} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\boxed{w = G \cdot h_a \left[\left(1 + \frac{G h_a}{p_a V_d}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\, t_c\right)^{\gamma-1} - 1\right]} = G \cdot h_a \cdot \left[\left(1 + \frac{\rho_l g H}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$



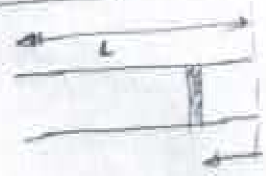
② Continuidad: $\frac{d}{dt}\left(\rho_d \cdot V_d \left(1 + \frac{A \cdot x_c}{V}\right)\right) = G$ ①

Energía: $\frac{d}{dt}\left(p_d \cdot \frac{V_d}{\gamma-1}\left(1 + \frac{A \cdot x_c}{V_d}\right)\right) = G \cdot h_a \left(\frac{p_d}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_d \cdot \frac{dx_c}{dt} \cdot A$ ②

Combinando ① y ② $\Rightarrow \frac{p_d}{\rho_d^{\gamma}} = \frac{p_a}{\rho_a^{\gamma}}$

$$\rho_a \left(\frac{p_d}{p_a}\right)^{1/\gamma} V_d \cdot \left(1 + \frac{A \cdot x_c}{V}\right) \Bigg|_{\pi_{l_0}^{1/\gamma}}^{\frac{p_d}{p_a}\left(1+\frac{A x_c}{V}\right)} = G \cdot (t - t_c)$$

$$\boxed{\pi_d^{1/\gamma} \cdot \left(1 + \frac{A \cdot L}{V_d}\,\frac{x_c}{L}\right) = \frac{G}{\rho_a \cdot V_d}\,(t - t_c) + \pi_{l_0}^{1/\gamma}}$$ ③



Líquido: $\frac{dv_c}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v_c^2}{2} + U\right) = 0$ $Q = v_c \cdot A$

$$\int_{x_c}^{L} \frac{dv_c}{dt}\,dx + \frac{p_{x=L}}{\rho_l} - \frac{p_{(x=x_c)}}{\rho_l} = 0$$

$$\frac{dv_c}{dt}(L - x_c) = -\frac{p_a + \rho_l g H}{\rho_l} + \frac{p_d}{\rho_l} \Rightarrow \left(1 - \frac{x_c}{L}\right) L \cdot \frac{dv_c}{dt} = \frac{\pi_d - \left(1 + \frac{\rho_l g H}{p_a}\right)}{\rho_l}\, p_a$$

$$\frac{L \rho_l}{p_a}\,\frac{d^2 x_c}{dt^2}\left(1 - \frac{x_c}{L}\right) = \pi_d - \left(1 + \frac{\rho_l g H}{p_a}\right)$$

$t = \frac{\rho_a V_d}{G}\,\tau$

$x_c = L\,\bar{x}_c$

$\Bigg\}$ $\boxed{\Lambda\,\frac{d^2 \bar{x}_c}{d\tau^2}\left(1 - \bar{x}_c\right) = \pi_d - \left(1 + \frac{\rho_l g H}{p_a}\right)}$ ④

$$\Lambda = \frac{\rho_l}{\rho_a}\,\frac{(G\,L/V_d)^2}{p_a \cdot \rho_a}.$$

Eoln

$$m_c \cdot \frac{dV_c}{dt} = A \cdot P_a \left(\pi_d - \pi_c \right)$$

$$\boxed{\frac{m_c}{P_c \cdot A \cdot L} \, \omega \, \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \pi_d - \pi_c}$$ ⑤

3) $\bar{x}_c$ cal $\Rightarrow$ O_c ④ y ⑤ $\Rightarrow$ $\pi_c \cdot (1+\bar{m}) = \pi_d + \bar{m} \cdot \left\{ 1 + \frac{\rho_c g H}{P_a} \right\}$

O_c ③ $\Rightarrow$ $\pi_d^{1/\gamma} = \pi_{t_0}^{1/\gamma} + \frac{G}{\rho_a V_d} \cdot (t - t_c) = \pi_{t_0}^{1/\gamma} + (t - t_c)$

D_c ④ $\Rightarrow$ $\omega \cdot \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \pi_c - \left(1 + \frac{\rho_c g H}{P_a} \right)$

4) $\pi_d^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{w_{max}}{G h_a}$

$$\frac{\rho_d}{\rho_a} = \pi_d^{\gamma - 1} = \left(1 + \frac{w_{max}}{G h_a} \right)^{\gamma}$$

$\Rightarrow \frac{\rho_a}{G} \frac{\rho_d}{\rho_a} \cdot \frac{V_d}{G} \cdot \frac{A L}{V_d} \cdot \frac{d\bar{x}_c}{dt} = G$

$\frac{A L}{V_d} \left(\frac{\rho_d}{\rho_a} \right) \frac{d\bar{x}}{dt} = 1$

$$\boxed{V_c = \frac{V_d}{A \cdot L} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{w_{max}}{G h_a} \right)^{\gamma}}}$$

$\pi_d = \pi_c = 1 + \frac{\rho_c g H}{P_a}$