LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. Segundo parcial **19/11/2018**

Apellidos y Nombre:..

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:** | | | |

- Tiempo total para el examen: 2h. No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto, cada ejercicio sobre 3 puntos y cada problema sobre 10 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras ni móviles.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en Moodle y en el tablón.

Preguntas de test (20%)

Para realizar un trabajo en una empresa se necesita formar un grupo de 5 personas y nombrar uno de ellos como coordinador. Si hay 15 personas que pueden integrarlo ¿cuántos grupos distintos pueden formarse?

a) $15 \cdot \binom{15}{5}$ b) $15 \cdot \binom{14}{4}$ c) $\frac{15!}{4!}$

B

Una persona está interesada en leer 14 libros pero, siendo realista y conociéndose, sabe que este verano solo acabará 4 de ellos. El número de formas en que podrá elegir los libros que leerá es:

a) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$ b) $14 + 13 + 12 + 11$ c) $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4!}$

C

Se considera la función recursiva $f : \text{LIST}_{\text{P}}(\mathbb{Z}) \to \text{LIST}(\mathbb{Z})$ definida por

$$f\,(\text{L}) = \begin{cases} [\,\text{L}\,] & \text{si LONG(L)} = 0 \text{ ó } 1 \\ f(\text{RESTO (RESTO (L))}) \,\|\, [\,[\,\text{CAB (RESTO(L))}\,]\,] & \text{si LONG(L)} \geq 2 \end{cases}$$

Entonces, f ([3, 4, 5, 6, 7]) es:

a) [[7], [6], [4]] b) [[4], [6], [7]] c) [[ ], [6], [4]]

A

El número de palabras (con significado o no) que se pueden formar con todas las letras de la palabra PALOMAR empezando por consonante es:

a) $4 \cdot \frac{6!}{2!}$ b) $4! \cdot \frac{6!}{2!}$ c) $\frac{6!}{4! \cdot 2!}$

A

Dada la función recursiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f\,(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ f\,(n-1) + f\,(n-3) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$

se verifica que la profundidad del árbol de dependencia en $n = 5$ es:

a) 2 b) 3 c) 4

B

Sea P(n) una propiedad sobre el número natural n de la que se sabe que, P(6) es cierta y para todo $n \geq 5$, si P(n) es cierta entonces también lo es P(n + 1). Entonces se verifica que:

a) P(n) es cierta para todo $n \geq 0$.
b) P(n) es cierta para todo $n \geq 5$.
c) P(n) es cierta para todo $n \geq 6$.

C

Definiciones (10%)

1. Definir conjunto de partida de una función recursiva $f : A \to B$.

   Conjunto de partida de f es el subconjunto de A formado por los elementos para los que la función está definida de modo explícito, a través de reglas básicas.

2. Enunciar el principio de inclusión – exclusión para los conjuntos finitos A, B y C.

   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Ejercicios (30%)

1. Probar por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 0$, siendo, $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las funciones definidas por:

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \quad \text{RB}_1 \\ 3 & \text{si } n = 1 \quad \text{RB}_2 \\ 3f(n-1) + 10f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \quad \text{RR} \end{cases} \quad \text{y} \quad g(n) = 5^n + (-2)^n$$

Paso base: Para $n = 0$ y $n = 1$ se verifica que:

$$f(0) \underset{\text{RB}_1}{=} 2 \quad \text{y} \quad g(0) \underset{\text{def}}{=} 5^0 + (-2)^0 = 1 + 1 = 2. \quad \text{Luego, } f(0) = g(0).$$

$$f(1) \underset{\text{RB}_1}{=} 3 \quad \text{y} \quad g(1) \underset{\text{def}}{=} 5^1 + (-2)^1 = 5 - 2 = 3. \quad \text{Luego, } f(1) = g(1).$$

Paso de inducción: Tomamos $n \geq 0$ y suponemos que $f(n) = g(n)$ y $f(n+1) = g(n+1)$
(Hipótesis de Inducción)

Probemos que $f(n+2) = g(n+2)$.

Como $n \geq 0$, se tiene que $n + 2 \geq 2$ y entonces hay que aplicar la regla recursiva para $f(n+2)$:

$$f(n+2) \underset{\text{RR}}{=} 3f(n+1) + 10f(n) \underset{\text{HI}}{=} 3g(n+1) + 10g(n) \underset{\text{def}}{=} 3(5^{n+1} + (-2)^{n+1}) + 10(5^n + (-2)^n) =$$

$$= 3 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{n+1} + 2 \cdot 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 5 \cdot (-2)^n =$$

$$= 3 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{n+1} + 2 \cdot 5^{n+1} - 5 \cdot (-2)^{n+1} = 5 \cdot 5^{n+1} - 2 \cdot (-2)^{n+1} = 5^{n+2} + (-2)^{n+2} = g(n+2).$$

Por tanto, $f(n+2) = g(n+2)$.

Entonces, el principio de inducción garantiza que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 0$.

2. Se consideran el conjunto $A = \{(n, L) \in \mathbb{N} \times LIST_P(\mathbb{N}) \,/\, 0 \le n \le LONG(L)\}$ y la función recursiva $f : A \rightarrow LIST_P(\mathbb{N})$ definida por:

$$f(n, L) = \begin{cases} L & \text{si } n = 0 \quad \text{RB} \\ f(n-1,\ \text{RESTO}(L) \,\|\, [\,\text{CAB}(L)\,]) & \text{si } n > 0 \quad \text{RR} \end{cases}$$

a) (*1 punto*) Evaluar detalladamente $f(2, [5, 3, 6, 9, 1])$.
b) (*1 punto*) Dar el conjunto de partida de *f*.
c) (*1 punto*) Describir $f(n, L)$ para $(n, L) \in A$ con $n \neq 0$.

a) $f(2, [5, 3, 6, 9, 1]) \underset{RR}{=} f(1, [3, 6, 9, 1, 5]) \underset{RR}{=} f(0, [6, 9, 1, 5, 3]) \underset{RB}{=} [6, 9, 1, 5, 3]$

b) $CP_f = \{ (0, L) \,/\, L \in LIST_P(\mathbb{N}) \}$ ya que la regla básica se define para $n = 0$ y L una lista plana cualquiera.

c) Si $(n, L) \in A$, con $n \neq 0$, $f(n, L)$ es la lista que se obtiene al eliminar los n primeros elementos de L y concatenarlos al final de la lista restante.

3. Definir de manera recursiva una función $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n)$ sea el número de segmentos de la figura n - ésima:

$f(1) = 4$ $\quad f(2) = 9$ $\quad f(3) = 15$ $\quad \ldots$

Evaluar detalladamente $f(4)$ usando la definición recursiva propuesta.

Para construir cada figura n - ésima a partir de la anterior, se añaden 3 segmentos para formar el último cuadrado y n segmentos más para formar la estrella interior. Por ello la regla recursiva es:

$f(n) = f(n-1) + 3 + n$ y la regla básica es $f(1) = 4$. Entonces, la definición recursiva de f es:

$$f(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 1 \quad \text{RB} \\ f(n-1) + 3 + n & \text{si } n > 1 \quad \text{RR} \end{cases}$$

Y la evaluación detallada de $f(4)$ es:

$f(4) \underset{RR}{=} f(3) + 3 + 4$ $\qquad = 15 + 3 + 4 = 22$

$f(3) \underset{RR}{=} f(2) + 3 + 3$ $\qquad = 9 + 3 + 3 = 15$

$f(2) \underset{RR}{=} f(1) + 3 + 2$ $\qquad = 4 + 3 + 2 = 9$

$f(1) \underset{RB}{=} 4$

4. En una urna hay 12 bolas numeradas, 5 de ellas son rojas, 4 son negras y 3 verdes. Si se sacan tres bolas de la urna a la vez:

   a) (*1.5 puntos*) ¿en cuantas ocasiones hay al menos una bola roja?

Consideramos los conjuntos:

U = {selecciones de tres bolas extraídas a la vez de la urna},
A = {selecciones de tres bolas extraídas a la vez de la urna en las que hay al menos una bola roja} y
B = {selecciones de tres bolas extraídas a la vez de la urna en las que no hay bola roja }

Se verifica que $U = A \cup B$ y $A \cap B = \varnothing$. Por tanto, $B = \overline{A}$ y por el principio del complementario:

$$|A| = |U| - |\overline{A}|.$$

Los elementos de U son las combinaciones (sin repetición) de 12 elementos tomados de tres en tres ya que al estar numeradas todas las bolas son distintas y al sacar las tres bolas a la vez no hay orden en la selección, por tanto, su número es:

$$|U| = C(12, 3) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2} = 2\cdot 11\cdot 10 = 220$$

Análogamente, los elementos de $\overline{A}$ son las combinaciones (sin repetición) de 7 elementos tomados de tres en tres:

$|\overline{A}| = C(7, 3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 7\cdot 5 = 35$ Entonces, $|A| = |U| - |\overline{A}| = 220 - 35 = 185.$

   b) (*1.5 puntos*) ¿en cuantas ocasiones hay únicamente dos de un mismo color?

Consideramos los siguientes conjuntos:

B = {selecciones de las tres bolas donde hay exactamente dos del mismo color}
B_1 = {selecciones de las tres bolas donde hay exactamente 2 rojas}
B_2 = {selecciones de las tres bolas donde hay exactamente 2 negras}
B_1 = {selecciones de las tres bolas donde hay exactamente 2 verdes}

Entonces, $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ y $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$, por lo que se puede aplicar el principio de adición y se tiene que: $|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3|$

Ahora aplicamos el principio de multiplicación para obtener el cardinal de B_1:

Paso 1: elegimos las dos bolas rojas a la vez (por lo que no hay distinción por el orden).
Hay $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ posibilidades.
Paso 2: elegimos la tercera bola que tiene que ser negra o verde. Hay 7 posibilidades.

Los resultados obtenidos son todos distintos, pues o bien cambian las bolas rojas elegidas o bien cambia la bola negra o verde elegida. Por el principio de multiplicación: $|B_1| = 10 \cdot 7 = 70$

Análogamente:

$$|B_2| = \binom{4}{2}\cdot 8 = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 8 = \frac{4\cdot 3}{2}\cdot 8 = 6\cdot 8 = 48$$

$$|B_3| = \binom{3}{2}\cdot 9 = \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 9 = 3\cdot 9 = 27$$

Entonces, $|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 70 + 48 + 27 = 145.$

Problema 1 (20%): JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

a) (*6 puntos*) Definir recursivamente una función $f : \text{LIST}_P(\mathbb{N}) \rightarrow \text{LIST}(\mathbb{N})$ tal que dada una lista plana L de longitud mayor o igual a 1 construya la lista que se obtiene con los mismos elementos que L salvo el último que queda multiplicado por 2, es decir, $f([\,3, 5, 7\,]) = [3, 5, 14]$.

Evaluar detalladamente según la definición recursiva propuesta $f([\,3, 5, 7\,])$.

Dada una lista de longitud mayor o igual a 2, hay que recorrerla hasta llegar a su último elemento y guardar todos los previos en una lista en el orden en que estaban. Esto se puede hacer con la regla recursiva: $f(\text{L}) = [\text{CAB(L)}] \,\|\, f(\text{RESTO(L)})$

Si L es una lista de longitud 1, que es lo que ocurre cuando se llega al último elemento de L, la regla debe ser: $f(\text{L}) = [2 \cdot \text{CAB(L)}]$. Esta es la regla básica necesaria para finalizar la recursividad.

Por último, si L es la lista vacía, se define $f([\;\;]) = [\;\;]$. Esta regla solo es necesaria para que la función esté definida sobre todas las listas planas pero no para finalizar la recursividad.

Con esto resulta:

$$f(\text{L}) = \begin{cases} [\;\;] & \text{si LONG(L)} = 0 \quad \text{RB}_1 \\ [2 \cdot \text{CAB(L)}] & \text{si LONG(L)} = 1 \quad \text{RB}_2 \\ [\text{CAB(L)}] \,\|\, f(\text{RESTO(L)}) & \text{si LONG(L)} > 1 \quad \text{RR} \end{cases}$$

Con esta definición evaluamos:

$$f([\,3, 5, 7\,]) \underset{\text{RR}}{=} [\,3\,] \,\|\, f([5, 7]) = [\,3\,] \,\|\, [\,5, 14\,] = [\,3, 5, 14\,]$$

$$f([\,5, 7\,]) \underset{\text{RR}}{=} [\,5\,] \,\|\, f([\,7\,]) = [\,5\,] \,\|\, [\,14\,] = [\,5, 14\,]$$

$$f([\,7\,]) \underset{\text{RB}_2}{=} [\,14\,]$$

b) (*4 puntos*) Extender f a listas cualesquiera, definiendo recursivamente $g : \text{LIST}(\mathbb{N}) \rightarrow \text{LIST}(\mathbb{N})$ según el criterio utilizado en el siguiente ejemplo, $g([\,5, [1, 4], [3, 5, 7\,]\,]) = [5, [1, 8], [3, 5, 14]]$.

Evaluar detalladamente según la definición recursiva propuesta $g([\,[3, 5], [7]\,])$.

A la vista del ejemplo, la extensión debe ser tal que en todo elemento de la lista que a su vez sea una lista, hay que hacer lo que se describe en el apartado anterior.

La RB_1 sigue siendo válida.

La RB_2 es válida cuando CAB(L) es un número, es decir, si LISTA(CAB(L)) = 0.

La RR_1 coincide con RR anterior que es válida también si LISTA(CAB(L)) = 0.

Hay que definir reglas recursivas que digan qué hacer cuando CAB(L) es una lista, es decir, cuando LISTA(CAB(L)) = 1. Y, en principio, se pueden distinguir dos casos:

i. Si LONG(L) = 1 y CAB(L) es una lista hay que aplicar g a CAB(L) y para no modificar la estructura de la lista hay meterla en una lista, es decir, hay una nueva regla recursiva:
   $g(\text{L}) = [\, g(\text{CAB(L)})\,]$.

ii. Si LONG(L) $\geq$ 2 y CAB(L) es una lista hay que hacer lo mismo que en i. con la CAB(L) y además aplicar g a la lista RESTO(L), es decir, en este caso la nueva regla recursiva es:

$$g(\mathrm{L}) = [\ g(\mathrm{CAB(L)})\ ] \,\|\, g(\mathrm{RESTO(L)})$$

A la vista de estas reglas, y teniendo en cuenta que se ha definido g([ ]) = [ ], también es posible definir una sola regla que trate el caso en que el elemento considerado sea una lista. La definición quedaría del modo siguiente:

$$\mathrm{g(L)} = \begin{cases} \mathrm{L} & \text{si LONG(L)} = 0 & \mathrm{RB_1} \\ [2 \cdot \mathrm{CAB(L)}] & \text{si LISTA(CAB(L))} = 0 \ \text{ y } \ \text{LONG(L)} = 1 & \mathrm{RB_2} \\ [\mathrm{CAB(L)}] \,\|\, g(\mathrm{RESTO(L)}) & \text{si LISTA(CAB(L))} = 0 \ \text{ y } \ \text{LONG(L)} > 1 & \mathrm{RR_1} \\ [\ g(\mathrm{CAB(L)})\ ] \,\|\, g(\mathrm{RESTO(L)}) & \text{si LISTA(CAB(L))} = 1 \ \text{ y } \ \text{LONG(L)} \geq 1 & \mathrm{RR_2} \end{cases}$$

La evaluación pedida es:

$$g\,([\,[3,5],[7]\,]) \underset{\mathrm{RR\,2}}{=} [\ g([\,3,5\,])\ ] \,\|\, g([\,[\,7\,]\,]) \qquad = [\,[\,3,10\,]\,] \,\|\, [\,[\,14\,]\,] = [\,[\,3,10\,],[\,14\,]\,]$$

$$g([\,3,5\,]) \underset{\mathrm{RR_1}}{=} [\,3\,] \,\|\, g([\,5\,]) \ = [\,3\,] \,\|\, [\,10\,] = [\,3,10\,]$$

$$g([\,5\,]) \underset{\mathrm{RB_2}}{=} [\,10\,]$$

$$g(\,[\,[\,7\,]\,]\,) \underset{\mathrm{RR\,2}}{=} [\ g(\,[\,7\,]\,)\ ] \,\|\, \mathrm{g}([\ ]) = [\,[\,14\,]\,] \,\|\, [\ ] = [\,[\,14\,]\,]$$

$$g([\,7\,]) \underset{\mathrm{RB_2}}{=} [\,14\,]$$

$$g([\ \ ]) \underset{\mathrm{RB_1}}{=} [\ \ ]$$

Problema 2 (20%): JUSTIFICAR TODAS LAS REPUESTAS.

En un viaje organizado con 30 integrantes, hoy como está lloviendo, el guía decide llevarles a un cine que tiene 6 salas con aforo de más de 50 personas cada una.

1. (*2 puntos*) ¿De cuántas maneras pueden comprar las entradas los 30 integrantes del grupo, si cada uno puede ver cualquiera de las películas?

   Se trata de variaciones con repetición de las 6 salas tomadas de 30 en 30, ya que cada sala puede elegirse entre 0 y 30 veces según la elección de cada persona. Además la selección S1S2S2…S2 es distinta de la selección S2S1S2 … S2 pues significará que las personas 1 y 2 van a distinta sala, por lo que el orden influye. Entonces hay $VR(6, 30) = 6^{30}$ maneras de comprar las 30 entradas.

2. En el grupo hay 5 amigos,

   a) (*3 puntos*) teniendo en cuenta que los 5 quieren ver la misma película para comentarla después ¿de cuántas maneras pueden comprar las entradas esas 30 personas?

   Para contar los resultados aplicamos el principio de multiplicación:

   PASO 1: elegir la sala a la que irán los 5 amigos. Hay 6 posibilidades.
   PASO 2: elegir la sala para las restantes personas del grupo. Hay VR(6, 25) posibilidades.

   Todos los resultados son distintos, pues cambiará la sala a la que asisten los 5 amigos o cambiará la sala para alguna de las personas restantes.

   Entonces, por el principio de multiplicación, el número de maneras en que se pueden comprar las 30 entradas es: $6 \cdot VR(6, 25) = 6 \cdot 6^{25}$

   b) (*3 puntos*) Si lo que quieren es que 4 de ellos vean una misma película pero el otro no ¿de cuántas maneras pueden hacer la compra de entradas?

   Para contar los resultados aplicamos el principio de multiplicación:

   PASO 1: elegir los 4 amigos que irán juntos (lo mismo que elegir el que irá solo). Hay 5 posibilidades.
   PASO 2: elegir la sala a la que irán los 4 amigos juntos. Hay 6 posibilidades.
   PASO 3: elegir la sala a la que irá el amigo que verá distinta película. Hay 5 posibilidades.
   PASO 4: elegir la sala para las restantes personas del grupo. Hay VR(6, 25) posibilidades.

   Todos los resultados son distintos, pues cambiará el amigo que va solo, o cambiará la sala a la que asisten los 4 amigos, cambiará la sala para el que va solo o cambiará la sala para alguna de las personas restantes.

   Entonces, por el principio de multiplicación, el número de maneras en que se pueden comprar las 30 entradas en este caso es: $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot VR(6, 25) = 150 \cdot 6^{25}$

3. (*2 puntos*) Si el guía compra las 30 entradas ¿de cuántas maneras puede hacerlo atendiendo solo al número de entradas en cada sala?

En este caso no hay que tener en cuenta el orden pues las entradas no se asignan todavía a las personas, se trata, por tanto, de combinaciones con repetición de las 6 salas tomadas de 30 en 30:

$$CR(6, 30) = PR(5 + 30, 5, 30) = \frac{35!}{5! \cdot 30!}$$