LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. **24/10/2017**

Apellidos y Nombre:...

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:** | | | |

- No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto, cada ejercicio sobre 3 puntos y cada problema sobre 10 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras ni móviles.
- Tiempo total para el examen: 2h
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en Moodle y en el tablón.

Preguntas de test (20%)

Una subfórmula de la fórmula $\neg p \wedge \perp \rightarrow \neg r \vee s$ es:

a) $p \wedge \perp$ b) $\perp \rightarrow \neg r$ c) $\neg r \vee s$

C

La siguiente interpretación, con dominio $D = \{ d_1, d_2 \}$ y $P, Q : D \rightarrow \{0, 1\}$ dadas por:

$$P(d_1) = 1, \quad P(d_2) = 0, \quad Q(d_1) = 1, \quad Q(d_2) = 0$$

es modelo de la fórmula:

a) $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ b) $\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ c) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$

A

La fórmula $\forall x\ R(x, y) \wedge \exists y \neg R(x, y)$

a) es abierta y tiene 1 variable libre.
b) es abierta y tiene 2 variables libres.
c) es una fórmula cerrada.

B

Dada una fórmula F se verifica que:

a) F es contingente, si su tableau tiene ramas abiertas y cerradas.
b) F es tautología, si su tableau tiene todas las ramas abiertas.
c) F es contradicción, si su tableau tiene todas las ramas cerradas.

C

La fórmula $\forall x \exists y\, P(x, y)$ al tomar como dominio D = {personas}, $P(x, y)$ = " y critica a x " significa:

a) Todo el mundo tiene a alguien a quien criticar.
b) Todo el mundo es criticado por alguien.
c) Hay alguien que critica a todos los demás.

B

La estructura deductiva $\neg p \vee q, \quad r \rightarrow \neg q \quad \Rightarrow \quad p \rightarrow r$ es incorrecta y un contraejemplo es:

a) $V(p) = V(q) = 1, \quad V(r) = 0.$
b) $V(p) = V(q) = V(r) = 0.$
c) $V(p) = 1, \quad V(q) = V(r) = 0.$

A

Definiciones (10%)

---

1. Enunciar las Leyes de De Morgan en Lógica.

   Dadas dos fórmulas A y B se verifica que $\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ y $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

2. Definir fórmula F satisfactible.

   Una fórmula es satisfactible si tiene algún modelo, es decir, si el valor veritativo de F es 1 para alguna valoración (interpretación).

Ejercicios (30%)

---

1. Formalizar el siguiente razonamiento en Lógica de Proposiciones:

   Antonio puede estudiar si no hay música en su casa y sus hermanos se callan o se van a la calle. Cuando no hay música, ni siquiera se oye el ruido del ventilador. Hoy sus hermanos no han salido a la calle y, a pesar de eso, Antonio puede estudiar. Seguro que sus hermanos están en silencio y no se oye el ventilador.

   p = Antonio puede estudiar.
   q = Hay música en casa de Antonio.
   r = Los hermanos de Antonio se callan (están en silencio).
   s = Los hermanos de Antonio se van a la calle.
   t = Se oye el ruido del ventilador.

   $P_1 = \neg q \wedge (r \vee s) \rightarrow p$
   $P_2 = \neg q \rightarrow \neg t$
   $P_3 = \neg s \wedge p$

   $Q = r \wedge \neg t$

---

2. Demostrar que la fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge (p \rightarrow q)$ es equivalente a una variable proposicional, usando las equivalencias elementales dadas e indicando en cada paso las que se han utilizado.

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge (p \rightarrow q) \underset{(1)}{\equiv} \neg (p \rightarrow q) \vee (p \wedge (p \rightarrow q)) \underset{(2)}{\equiv} (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge (p \rightarrow q)) \underset{(3)}{\equiv}$$
$$\underset{(3)}{\equiv} p \wedge (\neg q \vee (p \rightarrow q)) \underset{(1)}{\equiv} p \wedge (\neg q \vee (\neg p \vee q)) \underset{(4)}{\equiv} p \wedge (\neg q \vee (q \vee \neg p)) \underset{(5)}{\equiv}$$
$$\underset{(5)}{\equiv} p \wedge ((\neg q \vee q) \vee \neg p) \underset{(6)}{\equiv} p \wedge (\top \vee \neg p) \underset{(7)}{\equiv} p \wedge \top \underset{(8)}{\equiv} p$$

(1) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
(2) $\neg (A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$,
(3) Distributiva: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \equiv A \wedge (B \vee C)$
(4) Conmutativa
(5) Asociativa
(6) $\neg A \vee A \equiv \top$
(7) $\top \vee A \equiv \top$
(8) $A \wedge \top \equiv A$

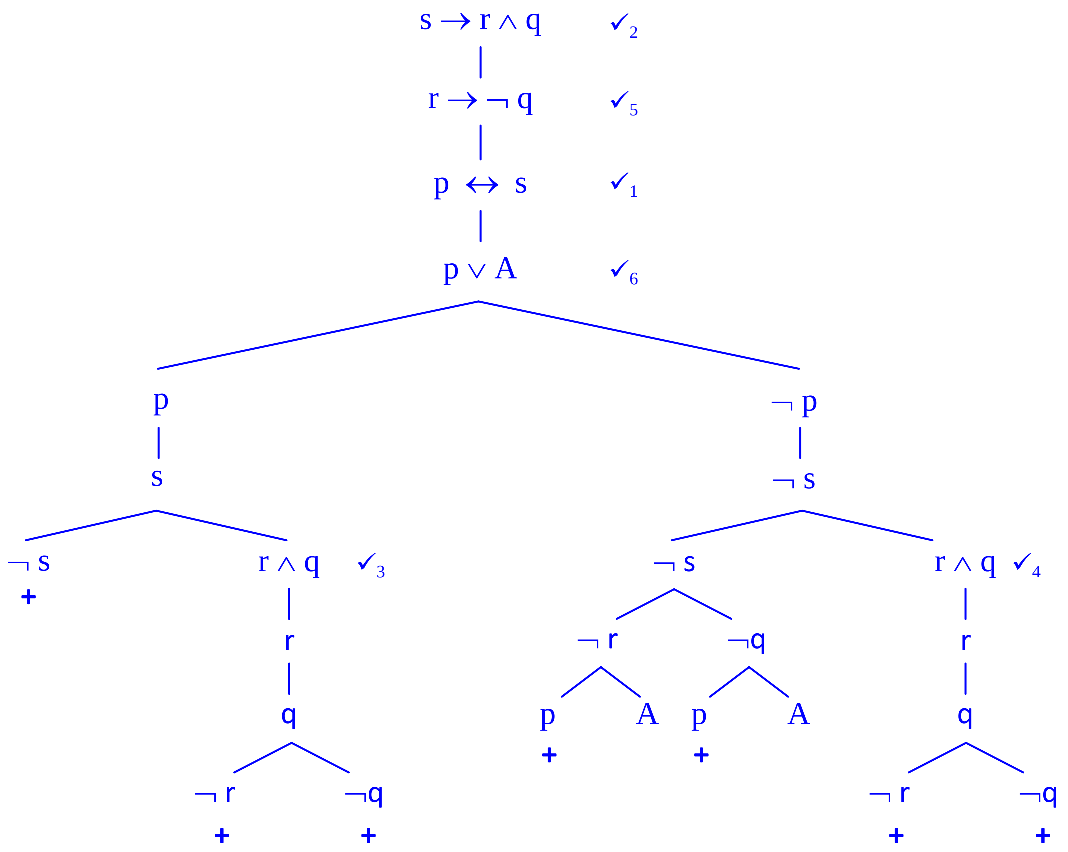
3. Se considera el conjunto de fórmulas:

$$\{ s \to r \wedge q,\ r \to \neg q,\ \ p \leftrightarrow s,\ \ p \vee A \}$$

donde A es una variable proposicional.

Determinar todos los valores de A que hagan que el conjunto sea insatisfactible.

Construimos el tableau del conjunto:



Para que el conjunto sea insatisfactible su tableau debe ser cerrado. Entonces el valor de A debe de cerrar las dos ramas abiertas. En una de ellas aparecen los literales $\neg$ p, $\neg$ s y $\neg$ r, por lo que A puede ser la variable p o la variable s o la variable r. En la otra rama aparecen los literales $\neg$ p, $\neg$ s y $\neg$ q, por lo que A puede ser la variable p o la variable s o la variable q.

En definitiva, como A debe cerrar las dos ramas abiertas, A puede ser la variable p o la variable s.

4. Clasificar la fórmula $F = \exists x \neg \big((P(x) \to \forall y\, Q(y)) \vee (Q(x) \to \exists y\, P(y)) \big)$.

Realizamos el tableau de F:

$\checkmark_1$ $F = \exists x \neg \big((P(x) \to \forall y\, Q(y)) \vee (Q(x) \to \exists y\, P(y)) \big)$

$\checkmark_2$ $\neg \big((P(a) \to \forall y\, Q(y)) \vee (Q(a) \to \exists y\, P(y)) \big)$ — Eliminación existencial $x = a$ en F

$\checkmark_3$ $\neg (P(a) \to \forall y\, Q(y))$

$\checkmark_6$ $\neg (Q(a) \to \exists y\, P(y))$

$P(a)$

$\checkmark_4$ $\neg \forall y\, Q(y)$

$\checkmark_5$ $F_1 = \exists y \neg Q(y)$

$\neg Q(b)$ — Eliminación existencial $x = b$ en F_1

$Q(a)$

$\checkmark_7$ $\neg \exists y\, P(y)$

$F_2 = \forall y \neg P(y)$

$\neg P(a)$ — Instanciación universal $y = a$ en F_2

+

Como el tableau de la fórmula F es cerrado se verifica que F es una contradicción.

Problema 1 (20%):

Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$p \wedge q \rightarrow s,\quad r \wedge \neg t \rightarrow \neg u,\quad \neg p \vee s \rightarrow \neg t,\quad r \vee \neg u \rightarrow q \wedge u \quad \Rightarrow \quad p \rightarrow \neg r$$

Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Entonces, incorporamos la negación de la conclusión $Q = \neg (p \rightarrow \neg r)$ al conjunto de premisas y debemos llegar a contradicción:

$P_1 = p \wedge q \rightarrow s$
$P_2 = r \wedge \neg t \rightarrow \neg u$
$P_3 = \neg p \vee s \rightarrow \neg t$
$P_4 = r \vee \neg u \rightarrow q \wedge u$
$\neg Q = \neg (p \rightarrow \neg r) \equiv p \wedge \neg \neg r \equiv p \wedge r$

1. p	de $\neg Q$ y la regla $A \wedge B \Rightarrow A$
2. r	de $\neg Q$ y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
3. $r \vee \neg u$	de 2 y la regla $A \Rightarrow A \vee B$
4. $q \wedge u$	de 3, P_4 y la regla Modus Ponens
5. q	de 4 y la regla $A \wedge B \Rightarrow A$
6. u	de 4 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
7. $p \wedge q$	de 1, 5 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$
8. s	de 7, P_1 y la regla Modus Ponens
9. $\neg (r \wedge \neg t)$	de 6, P_2 y la regla Modus Tollens
10. $\neg r \vee \neg \neg t$	de 9 y Ley de De Morgan
11. $\neg r \vee t$	de 10 y la equivalencia $\neg \neg A \equiv A$
12. t	de 11, 2 y la regla Silogismo Disyuntivo
13. $\neg (\neg p \vee s)$	de 12, P_3 y la regla Modus Tollens
14. $\neg \neg p \wedge \neg s$	de 13 y Ley de De Morgan
15. $\neg s$	de 14 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
16. $s \wedge \neg s$	de 8, 15 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$
17. $\perp$	de 16 y la equivalencia $A \wedge \neg A \equiv \perp$

Como se llega a $\perp$, la estructura deductiva es correcta.

Problema 2 (20%):

a) (5 *puntos*) Probar, utilizando reglas de inferencia, que es correcta la estructura deductiva:

$\mathbf{A} = \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\mathbf{B} = \exists x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$, $\mathbf{C} = \forall x \neg R(x) \Rightarrow \mathbf{H} = \exists x \neg (P(x) \vee Q(x))$.

b) (3 *puntos*) Construir una interpretación I con dominio $D = \{d_1, d_2\}$ que sea modelo del conjunto $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$.

c) (2 *puntos*) Usando únicamente los resultados obtenidos en los apartados a) y b) (es decir, sin hacer cálculos adicionales) probar que la estructura deductiva "$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \Rightarrow \neg \mathbf{H}$" es incorrecta y dar un contraejemplo.

a) Por reducción al absurdo:

$\mathbf{A} = \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$
$\mathbf{B} = \exists x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$
$\mathbf{C} = \forall x \neg R(x)$
$\neg \mathbf{H} = \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x \neg\neg (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

1. $Q(a) \rightarrow R(a)$ — por eliminación existencial con $x = a$ en B.
2. $\neg R(a)$ — por instanciación universal con $x = a$ en C.
3. $\neg Q(a)$ — por 1, 2 y la regla Modus Tollens.
4. $P(a)$ — por 3, $\neg$ Q y la regla Silogismo Disyuntivo.
5. $Q(a)$ — por 4, A y la regla Modus Ponens.
6. $Q(a) \wedge \neg Q(a)$ — por 5, 3 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$
7. $\perp$ — por 6 y la equivalencia $A \wedge \neg A \equiv \perp$

Como se llega a $\perp$, la estructura deductiva es correcta.

Por implicación directa:

$\mathbf{A} = \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$
$\mathbf{B} = \exists x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$
$\mathbf{C} = \forall x \neg R(x)$
$\mathbf{H} = \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x\,(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

1. $Q(a) \rightarrow R(a)$ — por eliminación existencial con $x = a$ en B.
2. $\neg R(a)$ — por instanciación universal con $x = a$ en C.
3. $\neg Q(a)$ — por 1, 2 y la regla Modus Tollens.
4. $\neg P(a)$ — por 3, A y la regla Modus Tollens.
5. $\neg P(a) \wedge \neg Q(a)$ — por 3, 4 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$
6. $\exists x\,(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ — por introducción del cuantificador existencial en 5.
7. $\mathbf{H} = \exists x \neg (P(x) \vee Q(x))$ — por la ley de De Morgan.

Como se llega a la conclusión **H**, la estructura deductiva es correcta.

b) Construir una interpretación I con dominio D = $\{d_1, d_2\}$ que sea modelo del conjunto {A, B, C}.

Para hallar un modelo del conjunto {A, B, C}, construimos su tableau.

$A = \forall x\,(P(x) \to Q(x))$

$\checkmark_1$ $B = \exists x\,(Q(x) \to R(x))$

$C = \forall x\,\neg R(x)$

$\checkmark_2$ $Q(a) \to R(a)$ — Eliminación del existencial $x = a$ en

$\neg R(a)$ — Instanciación universal $x = a$ en C

$\neg Q(a)$ | $R(a)$ +

$\checkmark_3$ $P(a) \to Q(a)$ — Instanciación universal $x = a$ en A

$\neg P(a)$ (1) | $Q(a)$ +

Para construir una interpretación I que sea modelo de A, B y C con dominio D = $\{d_1, d_2\}$ tomamos $a = d_1$ y funciones booleanas P, Q, R: D $\to$ {0, 1} definidas como sigue:

- Los literales de la rama abierta deben tomar valor de verdad 1. Por tanto: $P(d_1) = Q(d_1) = R(d_1) = 0$.
- Como en la rama abierta aparece la fórmula cuantificada universalmente $\forall x\,\neg R(x)$ también debe verificarse que $R(d_2) = 0$.
- Y por último al aparecer en la rama abierta la fórmula $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ también debe verificarse:

  $P(d_2) = Q(d_2) = 1$ o bien $P(d_2) = Q(d_2) = 0$ o bien $P(d_2) = 0$ y $Q(d_2) = 1$

Entonces podemos elegir la interpretación I con dominio D = $\{d_1, d_2\}$, $a = d_1$ y las funciones booleanas P, Q, R: D $\to$ {0, 1} definidas por:

$P(d_1) = 0$	$Q(d_1) = 0$	$R(d_1) = 0$
$P(d_2) = 1$	$Q(d_2) = 1$	$R(d_2) = 0$

d) Usando únicamente los resultados obtenidos en los apartados a) y b) (es decir, sin hacer cálculos adicionales) probar que la estructura deductiva “**A**, **B**, **C** $\Rightarrow$ $\neg$ **H** ” es incorrecta y dar un contraejemplo.

Como I es modelo de **A**, **B** y **C** y la estructura deductiva “**A**, **B**, **C** $\Rightarrow$ **H** ” es correcta, entonces la valoración I también es modelo de la conclusión **H**. Por tanto, I no es modelo de $\neg$ **H**.

Así, I es modelo de las premisas **A**, **B** y **C** y no lo es de la conclusión $\neg$ **H**, por lo que I es CONTRAEJEMPLO de la estructura “**A**, **B**, **C** $\Rightarrow$ $\neg$ **H** ”, que por consiguiente es INCORRECTA.