Análisis Matemático
Prueba de evaluación 2 (Temas 3, 4 y 5) 22-11-2016

Duración de esta prueba: 60 minutos.

Es necesario entregar la AA2 **COMPLETAMENTE** resuelta (escrita a mano y con el nombre) para que se corrija esta prueba.

Test (30 %)

En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta. Poner la letra elegida en la casilla correspondiente.

Calificación del test: respuesta acertada = +0.3, justificación correcta = +0.3.

1. Se considera la ecuación diferencial $y'' + y = 0$. Entonces:
   (a) La solución general es $y(x) = Ae^x + B$ para todo $A, B \in \mathbb{R}$.
   (b) La solución general es $y(x) = Ae^x + Bxe^x$ para todo $A, B \in \mathbb{R}$.
   (c) La solución general es $y(x) = A\,\mathrm{sen}(x) + B\cos(x)$ para todo $A, B \in \mathbb{R}$.

C

Justifica la respuesta: La EDO $y'' + y = 0$ es lineal de orden dos homogénea con coeficientes constantes. Su polinomio característico es $z^2 + 1$, con raíces complejas $z = \pm i$. Por tanto la solución general es $y(x) = A\,\mathrm{sen}(x) + B\cos(x)$, con $A, B \in \mathbb{R}$.

2. Se considera la sucesión $a_n = \dfrac{1}{\log n} + \dfrac{1}{\log(2n)} + ... + \dfrac{1}{\log(n^2)}$. Entonces:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
   (c) a_n es acotada pero no tiene límite.

B

Justifica la respuesta: Se verifica que $a_n \geq \dfrac{1}{\log(n^2)} + \dfrac{1}{\log(n^2)} + ... + \dfrac{1}{\log(n^2)} = \dfrac{n}{\log(n^2)} = \dfrac{n}{2\log n}$ y como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2\log n} = \infty$ (pues $n \gg \log(n)$), se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

3. La sucesión recursiva $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + n, \quad n \geq 1 \end{cases}$
   (a) es convergente, porque es monótona creciente y acotada.
   (b) es acotada, pero no es monótona.
   (c) es monótona, pero no es acotada.

C

Justifica la respuesta: La sucesión a_n es una sucesión de términos positivos monótona creciente, ya que $a_{n+1} - a_n = a_n + n > 0$ para todo $n \geq 1$. Además no está acotada superiormente ya que $a_{n+1} \geq n$ para todo n.

4. La ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n \dfrac{n+1}{n}$ para $n \geq 1$, $x_1 = 2$ tiene como solución:

(a) $x_n = (n+1)!$

(b) $x_n = 2^n$

(c) $x_n = 2n$

$\boxed{\text{C}}$

Justifica la respuesta: Sustituyendo $x_n = 2n$ en la ecuación en diferencias se tiene $2n+2 = 2n\dfrac{n+1}{n}$, que evidentemente es cierto. Además para $n = 1$ es $2n = 2 = x_1$. (También se puede justificar resolviendo la ecuación en diferencias, que es lineal de primer orden homgénea.)

---

5. Sea a_n una sucesión convergente a $l \geq 1$. Se puede asegurar que

(a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_0$.

(b) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq 1$ para todo $n \geq n_0$.

(c) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} \geq 1$.

$\boxed{\text{A}}$

Justifica la respuesta: Basta usar la propiedades de los límites: Como es límite es $l \geq 1 > 1/2$, se puede asegurar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_0$.

Teoría (10 %)

(a) *(6 puntos)* Definir los conceptos $a_n \ll b_n$ y $a_n \sim b_n$.

Se dice que $a_n \ll b_n$ si y solo si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Se dice que $a_n \sim b_n$ si y solo si $\lim \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = l \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) *(4 puntos)* Demostrar que $n! \ll n^n$.

De acuerdo con la definición, para demostrar que $n! \ll n^n$, veremos que $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.
Podemos escribir $n! \ll n^n$ como producto de n factores y se verifica que :

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}\,\frac{1}{n} \leq 1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

(sin más que acotar por 1 todos los factores menos el último).
Por tanto, dado que las sucesiones 0 y $1/n$ convergen a 0, usando la regla del sandwich se deduce que $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Cuestión 1 (10%)

Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = y\cos(x)$ y la solución particular con dato inicial $y(\pi) = 1$.

La ecuación diferencial de primer orden es de variables separables, ya que se puede escribir de la forma $\frac{y'}{y} = \cos(x)$. Integrando en ambos miembros se tiene

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int \cos(x)\,dx$$

Por tanto $\ln(y) = \sin(x) + C$, y la solución general de la EDO es de la forma $y = Ke^{\sin(x)}$.

Para obtener la solución particular imponemos la condición inicial $1 = Ke^{\sin(\pi)}$. Por tanto $K = e^0 = 1$ y la solución particular es $y = e^{\sin(x)}$.

Cuestión 2 (10 %)

Obtener la expresión explícita de la sucesión x_n que verifica $x_{n+1} + 9x_{n-1} = 6x_n$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$. ¿Se verifica $x_n \in O(3^n)$?

La ecuación en diferencias $x_{n+1} + 9x_{n-1} = 6x_n$ es lineal, de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes. El polinomio característico es $z^2 - 6z + 9$, que tiene raíz doble $z = 3$.

Por lo tanto la solución general de la ecuación en diferencias es

$$x(n) = A3^n + Bn\,3^n$$

Hallamos ahora la solución particular:

Como $x_0 = 1$, debe ser $A = 1$ y como $x_1 = 4$, debe ser $4 = 3A + 3B$, es decir $B = 1/3$.

Por tanto la solución particular es $x_n = 3^n + n\,3^{n-1}$.

Problema 1 (20 %)

Se considera las sucesiones

$$x_n = n2^n + (-e)^n\,, \qquad y_n = \frac{(n+2)! + 2^n}{n^2 + n^2\ln(n)}$$

(a) *(6 puntos)* Obtener sus órdenes de magnitud.

Para determinar el orden de x_n, tenemos en cuenta que $(-e)^n \sim e^n \gg n2^n$, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(e/2)^n} = 0$, por jerarquía de infinitos $(e/2 > 1)$.
En consecuencia, por la propiedad del orden de una suma, se deduce que $x_n \sim e^n$.

Para determinar el orden de y_n, tenemos en cuenta que el orden de un producto (o cociente) es el producto (o cociente) de los órdenes.
En el denominador se tiene: $n^2 + n^2\ln(n) \sim n^2\ln(n)$, por la propiedad de la suma, ya que $n^2 \ll n^2\ln(n)$.
Por otra parte, dado que $2^n \ll (n+2)!$, se tiene que

$$(n+2)! + 2^n \sim (n+2)! = (n+2)(n+1)n! \sim n^2 n!$$

En resumen:

$$y_n = \frac{(n+2)! + 2^n}{n^2 + n^2\ln(n)} \sim \frac{n^2 n!}{n^2\ln(n)} = \frac{n!}{\ln(n)}$$

(b) *(2 puntos)* Ordenar las sucesiones de menor a mayor magnitud.

Se verifica que $e^n \ll \frac{n!}{\ln(n)}$, ya que como $\ln(n) \ll (3/e)^n$, se puede poner

$$e^n\ln(n) \ll 3^n \ll n!$$

En consecuencia, aplicando las propiedades de las relaciones, se concluye que $x_n \ll y_n$.

(c) *(2 puntos)* Obtener, en caso de que existan, todos los valore sde $r > 0$ para los cuales $x_n \in O(r^n)$ y aquéllos para los que $y_n \in O(r^n)$

La sucesión $x_n \in O(r^n)$, para todo $r \geq e$ pues $x_n \sim e^n$. Pero $y_n \notin r^n$, para ningún valor de r, pues $r^n\ln(n) \ll n!$ para cualquier r.

Análisis Matemático. Parte con ordenador Prueba EC2 - A. 22-11-2016.

Tiempo para esta parte del examen: 25 **minutos.**

Problema 1 (10%)

Para cuerpos de baja densidad, la resistencia del aire es proporcional a la magnitud de la velocidad de dicho cuerpo, pero en sentido contrario a la dirección de movimiento. Por ello, la velocidad, en caída libre, de un cuerpo de ese tipo viene dada por la ecuación diferencial:

$$mV'(t) = mg - kV(t)$$

siendo m la masa del cuerpo, g la aceleración de la gravedad y $k > 0$ la constante de amortiguación.

Considerando que nos encontramos en el planeta Venus, donde $g = 8.9\,m/s^2$, y que t se mide en segundos, se pide:

(a) *(6 puntos)* Hallar la expresión de $V(t)$ si se suelta un cuerpo de masa $4\,gr$ en caída libre sin darle ningún tipo de impulso.

Podemos considerar m expresada en gramos y se trata de resolver la ecuación diferencial $4V' = 4 \cdot 8.9 - kV$, con la condición inicial $V(0) = 0$.

La solución general se obtiene con el comando `Resolver EDO` y es

$$V = e^{-(kt)/4} \left(\frac{178 e^{(kt)/4}}{5k} + c \right).$$

Para obtener la solución particular, basta ejecutar, tras la obtención de la solución general, la instrucción

```
ic1(%, t=0, V=0);
```

y se obtiene $V(t) = e^{-(kt)/4} \left(\frac{178 e^{(kt)/4} - 178}{5k} \right) \, m/s.$

(b) *(3 puntos)* Estudiar el comportamiento asintótico de $V(t)$ y hallar el valor de k si la velocidad límite es $0.2\,m/s$.

Si definimos $V(t)$ y hacemos el límite cuando t tiende a ∞ se obtiene que la velocidad límite es $\frac{178}{5k}$. Si hacemos $\frac{178}{5k} = 0.2$, resulta $k = 178\,gr/s$.

(c) *(1 punto)* Hallar la velocidad del cuerpo al cabo de 2 segundos.

Sustituyendo $k = 178$ en $V(t)$ y evaluando $V(2)$, se obtiene que al cabo de 2 segundos la velocidad es aproximadamente igual a $0.2\,m/s$.

Problema 2 (10%)

Un algoritmo emplea dos instrucciones para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, usa $n!$ instrucciones para reducir el problema a n problemas de $n-1$ datos y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Si a_n representa el número de instrucciones para n datos de entrada, se pide:

(a) *(2 puntos)* Obtener la expresión recursiva de a_n.

La sucesión recursiva es $a(1) = 2$, $a(n) = n! + n\,a(n-1)$, para $n > 1$.

(b) *(5 puntos)* Resolver la ecuación en diferencias para hallar la expresión explícita de a_n.
Basta hacer

```
load(solve_rec)

solve_rec(a(n)=n!+ n*a(n-1), a(n),a(1)=2);
```

y se obtiene $a(n) = (n-1)\,n! + 2\,n!$, que se puede simplificar, sacando factor común $n!$, $a(n) = (n-1+2)n! = (n+1)!$

(c) *(3 puntos)* Otro algoritmo que resuelve el mismo problema necesita $12(n!)$ operaciones para n datos de entrada. ¿Cuál de los dos algoritmos es más eficiente para resolver el problema con 10 datos de entrada? ¿Y para grandes cantidades de datos?

Si definimos $a(n)$ como función y evaluamos, resulta $a(10) = 39916800$, mientras que $12(10!) = 43545600$, luego para 10 datos interesa el primer algoritmo.

Sin embargo como $a(n) = (n+1)! \gg 12(n!)$, para grandes cantidades de datos interesa el segundo.

Nota En el modelo B las soluciones son:

Problema 1: $a(n) = (n-1)! + (n-1)a(n-1)$, con $a(1) = 1$, la explícita es $a(n) = n!$. Para grandes cantidades de datos es mejor $b(n) = 11(n-1)!$. Pero para 10 datos es mejor $a(n)$.

Problema 2: $V(t) = e^{-(kt)/6}\dfrac{111e^{(kt)/6} - 111}{5k}$. La velocidad límite es $111/5k$, de donde resulta $k = 74\,gr/s$ y $V(2) \approx 0.2999\,m/s$