LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. EXAMEN FINAL **20/01/2017**

Apellidos y Nombre:..

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:** | | | |

- No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto y cada ejercicio sobre 3 puntos.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.
- Tiempo para la primera parte del examen: 2h

Preguntas de test (20%)

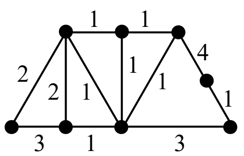
Sea P(n) una propiedad sobre el número natural n de la que se sabe que P(3) y P(4) son ciertas y para todo $n \geq 4$, si P(n) y P($n + 1$) son ciertas entonces también lo es P($n + 2$). En esas condiciones,

a) se puede garantizar que P(n) es cierta para todo $n \geq 3$.
b) se puede garantizar que P(n) es cierta para todo $n \geq 4$.
c) si P(5) es cierta entonces se puede garantizar que P(n) es cierta para todo $n \geq 3$.

C

Cualquier árbol recubridor de peso mínimo del siguiente grafo tiene peso:

a) 7.
b) 10.
c) 17.



B

La estructura deductiva $p \wedge q \rightarrow s, \neg (p \rightarrow t) \Rightarrow (w \vee s) \wedge \neg t$ verifica que:

a) es correcta.
b) es incorrecta y V(p) = 1, V(q) = V(r) = V(s) = V(t) = V(w) = 0 es un contraejemplo.
c) es incorrecta y V(p) = V(q) = V(r) = V(s) = V(t) = V(w) = 0 es un contraejemplo.

B

Los dos grafos siguientes son bipartitos:

a) P_5 y C_6 b) K_5 y C_6 c) C_5 y P_6

A

Dada la función recursiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 \cdot f(n-1) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par, } n \neq 0 \end{cases}$$

el conjunto de partida de f es:

a) $\{0\}$ b) $\{ 1 \}$ c) $\{ 2n \,/\, n \in \mathbb{N} \}$

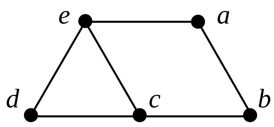
C

En el conjunto ordenado ({2, 3, 5, 6, 18, 24}, |) se verifica:

a) No hay maximales. b) Hay dos maximales c) Hay tres maximales

C

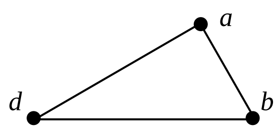
Se considera el grafo G siguiente:

G 

El subgrafo de G inducido por sus vértices de grado 2 es:

a) 

b) 

c) 

B

El conectivo principal de la fórmula $\neg(p \wedge s) \vee t \to q$ es:

a) la implicación. b) la disyunción. c) la negación.

A

La formalización del enunciado “Todo fichero ejecutable que contenga un virus es borrado” si se toma como dominio D = {ficheros} y los predicados E(x) = “x es un ejecutable”, C(x) = “x contiene un virus” y B(x) = “x es borrado”, es:

a) $\forall x\,(E(x) \wedge C(x) \to B(x))$ b) $\forall x\,(E(x) \wedge C(x) \wedge B(x))$ c) $\forall x\,(E(x) \wedge C(x) \leftrightarrow B(x))$

A

El número combinatorio $\binom{n}{r}$ para $1 \le r \le n-1$ es igual a:

a) $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{n-r}$ b) $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ c) $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n}{r-1}$

B

Definiciones (10%)

---

1. Decir cuándo una fórmula F se denomina contradicción en Lógica. Dar una fórmula que sea contradicción cuyo conectivo principal sea la implicación, $\to$.

Una fórmula F es una contradicción si todas las valoraciones (o interpretaciones) son no modelos de F.

Son contradicciones con conectivo principal $\to$, por ejemplo:

$$\top \to \bot, \qquad p \vee \neg p \to q \wedge \neg q, \qquad p \vee \neg p \to \bot$$

2. Definir combinaciones de r elementos de un conjunto A de n elementos y decir cuántas hay.

Llamamos combinación de r elementos de un conjunto A de n elementos ($n \ge r$) a una selección sin orden de r elementos distintos de A. Su número es: $C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

3. Dar la relación entre el número de variaciones y el de combinaciones de r elementos de un conjunto A de n elementos.

$$\mathrm{C}(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}=\frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{\mathrm{V}(n,r)}{\mathrm{P}(r)}$$

4. Definir elementos comparables de un conjunto ordenado (A, ≤).

Dados a, $b \in$ A, se dice que a y b son comparables si se verifica que $a \le b$ ó bien $b \le a$.

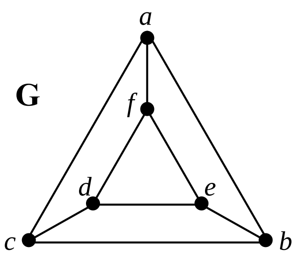
5. Enunciar la fórmula de Euler para los grados de los vértices de un grafo G y justificarla.

La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual al doble del número de aristas, es decir, si un grafo G = (V, A) tiene q aristas y n vértices, se verifica: $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{g}(v_i)=2q$

Justificación: cada arista es adyacente a dos vértices, por tanto, si se suman los grados de los vértices cada arista se cuenta dos veces, una por cada extremo.

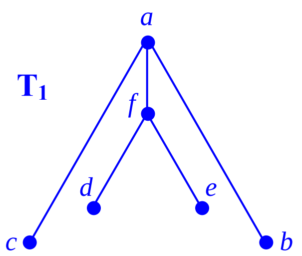
Ejercicios (30%)

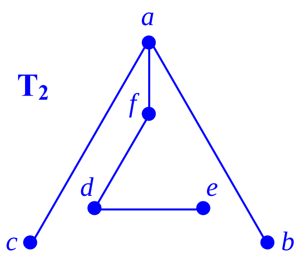
1. Dar tres árboles recubridores del grafo G que no sean isomorfos entre sí. Justificar que no lo son.

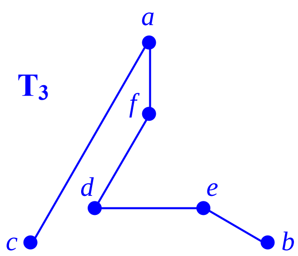
G


Como el grafo G tiene 6 vértices, sus árboles recubridores serán subgrafos de G conexos y con 5 aristas.

Por ejemplo, son árboles recubridores de G los tres árboles siguientes:





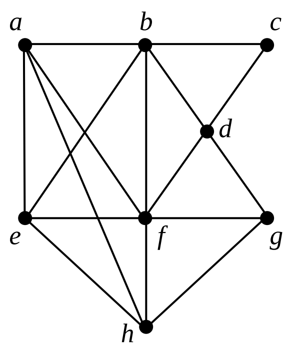


Sus secuencias de grados son:

sec(T_1) = [3, 3, 1, 1, 1, 1]   sec(T_2) = [3, 2, 2, 1, 1, 1]   sec(T_3) = [2, 2, 2, 2, 1, 1]

Por tanto, tienen secuencias de grados distintas y no son isomorfos dos a dos.

2. Estudiar si el grafo siguiente es euleriano o semieuleriano. En caso de serlo, dar un circuito o un recorrido euleriano, según corresponda.

G


La secuencia de grados de G es: [6, 5, 4, 4, 4, 4, 3].
Como G tiene vértices de grado impar, G no es euleriano y como son exactamente dos los vértices de grado impar de G, g y b, el grafo G es semieuleriano.

Un recorrido euleriano de G debe empezar en uno de los vértices de grado impar y acabar en el otro. Por ejemplo:

g, *f*, *b*, *d*, *c*, *b*, *e*, *h*, *a*, *f*, *d*, *g*, *h*, *f*, *e*, *a*, *b*

3. En el código Morse cada palabra es una sucesión de puntos y rayas.

   a) ¿Cuántas palabras de longitud 9 son palíndromos (capicúas)?
   b) ¿Cuántas palabras de longitud 9 empiezan por punto o acaban por raya?

a) Una palabra capicúa de longitud 9 está determinada por los valores de las 5 primeras posiciones pues las 4 últimas coinciden, de manera simétrica, con las 4 primeras.

   Cada cadena de 5 posiciones se forma eligiendo 5 elementos del conjunto $\{\bullet, -\}$, por lo tanto es claro que habrá repeticiones y que el orden de elección es relevante para formar las cadenas. Entonces, se trata de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 5 en 5 y su número es: $VR(2, 5) = 2^5$.

b) Sean A = {palabras de longitud 9 que empiezan por $\bullet$} y
   B = {palabras de longitud 9 que acaban por $-$}

   Lo que se pide es el cardinal del conjunto $A \cup B$ y el principio de inclusión-exclusión afirma que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

   Usando un argumento análogo al anterior:

   $|A| = VR(2, 8) = 2^8$ (pues la 1ª posición es fija)
   $|B| = VR(2, 8) = 2^8$ (pues la 9ª posición es fija)
   $|A \cap B| = VR(2, 7) = 2^7$ (pues la 1ª y la 9ª posición son fijas)

   Por lo tanto, $|A \cup B| = 2^8 + 2^8 - 2^7 = 2^7 (2^2 - 1) = 3 \cdot 2^7$

4. Diariamente 5 empresas distintas reparten su *flyer* (hoja publicitaria) en los buzones de mi edificio. Cuando un repartidor tiene mucha prisa o no va con cuidado introduce en algún buzón más de un *flyer*. Mi buzón se satura con 10 *flyer*s.

   a) ¿De cuántas maneras distintas puede saturarse mi buzón cada día?

   El buzón se satura con 10 *flyers* y consideramos que se piden las formas de tener exactamente 10 de ellos en el buzón sin tener en cuenta el orden en que están.

   En estas condiciones, como hay 5 modelos de *flyer*, para tener una colección de 10, es claro que va a haber repetición de modelo y que el orden en que está cada modelo en la colección no es relevante.

   Se trata de las combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 10 en 10 y su número es: $CR(5, 10) = PR(4 + 10, 4, 10) = \dfrac{14!}{4! \cdot 10!} = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001$

   b) ¿En cuántas de ellas hay *flyer*s de solo 4 de las empresas?

   Se puede resolver usando el principio de multiplicación.
   Paso 1: Hay que elegir qué empresa no introduce su *flyer* en mi buzón y hay 5 posibilidades.
   Paso 2: Argumentamos como en el apartado a) pero suponiendo que los 10 *flyers* los reparten las otras 4 empresas. En este caso se trata de las combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 10 en 10:

$$CR(4, 10) = PR(3 + 10, 3, 10) = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$$

   Como todos los resultados son distintos, por el principio de multiplicación, se tiene que el número de maneras distintas en que puede saturarse mi buzón cada día con *flyer*s de solo 4 de las empresas es:

$$5 \cdot CR(4, 10) = 5 \cdot 286 = 1430.$$

5. Probar que la fórmula $F = (p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ es equivalente a una constante lógica.

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \underset{(1)}{\equiv} \neg((p \to q) \wedge \neg q) \vee \neg p \underset{(2)}{\equiv} (\neg (p \to q) \vee \neg\neg q) \vee \neg p \underset{(3)}{\equiv}$$

$$\underset{(3)}{\equiv} ((p \wedge \neg q) \vee q) \vee \neg p \underset{(4)}{\equiv} ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p \underset{(5)}{\equiv} ((p \vee q) \wedge \top) \vee \neg p \underset{(6)}{\equiv}$$

$$\underset{(6)}{\equiv} (p \vee q) \vee \neg p \underset{(7)}{\equiv} (\neg p \vee p) \vee q \underset{(5)}{\equiv} \top \vee q \underset{(8)}{\equiv} \top$$

(1) $A \to B \equiv \neg A \vee B$

(2) Ley de De Morgan

(3) $\neg (A \to B) \equiv A \wedge \neg B$ y $\neg\neg A \equiv A$

(4) Distributiva: $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

(5) $A \vee \neg A \equiv \top$

(6) $A \wedge \top \equiv A$

(7) Conmutativa, Asociativa

(8) $A \vee \top \equiv \top$

6. Utilizar el método del tableau para determinar si la fórmula F es satisfactible. Caso de serlo, construir una interpretación que sea modelo de F.

$$F = \exists x \neg \big((P(x) \vee Q(x) \to \forall y\, Q(y)) \vee \exists y\, P(y) \big)$$

Un tableau de la fórmula F es:

$\checkmark_1$ $F = \exists x \neg ((P(x) \vee Q(x) \to \forall y\, Q(y)) \vee \exists y\, P(y))$

$\checkmark_2$ $\neg ((P(a) \vee Q(a) \to \forall y\, Q(y)) \vee \exists y\, P(y))$ Eliminación existencial $x = a$ en F

$\checkmark_4$ $\neg (P(a) \vee Q(a) \to \forall y\, Q(y))$

$\checkmark_3$ $\neg \exists y\, P(y)$

$F_1 = \forall y \neg P(y)$

$P(a) \vee Q(a)$

$\checkmark_5$ $\neg \forall y\, Q(y)$

$\checkmark_6$ $F_2 = \exists y \neg Q(y)$

$\neg Q(b)$ Eliminación existencial $x = b$ en F_2

$$\begin{array}{cc} P(a) & Q(a) \\ | & | \\ \neg P(a) & \neg P(a) \\ + & \mathbf{(1)} \end{array}$$

Instanciando $x = a$ en F_1

La única fórmula cuantificada universalmente no permite cerrar la rama (1), por tanto, el tableau de F es abierto y F es satisfactible. Los modelos de F deben ser modelos de todas las fórmulas de la rama abierta. Uno de ellos es la interpretación:

$D = \{d_1, d_2\}$ $a = d_1$ $b = d_2$

$Q(d_1) = 1$ para que sea modelo de la fórmula $Q(a)$

$Q(d_2) = 0$ para que sea modelo de la fórmula $\neg Q(b)$

$P(d_2) = 0$ para que sea modelo de la fórmula $\neg P(a)$

$P(d_1) = 0$ para que sea modelo de la fórmula $\forall y \neg P(y)$

7. En el conjunto A de las circunferencias del plano se define la relación:

$$C_1 \text{ R } C_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{el radio de la circunferencia } C_1 \text{ es igual al de } C_2.$$

Estudiar si R es antisimétrica y si es transitiva.

Antisimétrica:

La relación R no es antisimétrica puesto que existen circunferencias C_1 y C_2 que tienen igual radio por lo que C_1 R C_2 y C_2 R C_1 pero que son distintas por tener distinto centro.

Transitiva:

Sean $C_1, C_2, C_3 \in A$ tales que C_1 R C_2 e C_2 R C_3. Entonces, el radio de la circunferencia C_1 es igual al de C_2 y el radio de la circunferencia C_2 es igual al de C_3. Por tanto, el radio de la circunferencia C_1 es igual al de C_3 y se tiene que C_1 R C_3.

Por tanto, R es transitiva.

8. Se considera el conjunto A de los números naturales pares entre 0 y 14, incluidos. En A se define la relación de equivalencia R:

$$n \text{ R } m \quad \Leftrightarrow \quad \text{el producto de las cifras de } n \text{ es igual al de las cifras de } m.$$

Describir cada clase de equivalencia. Hallar el conjunto cociente A/R y su cardinal.

Dado el conjunto A = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} para hallar el conjunto cociente, estudiamos las clases de equivalencia que establece la relación R:

La clase del 0 es: $[0] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 0\} = \{0, 10\} = [10]$ pues $1 \cdot 0 = 0$
La clase del 2 es: $[2] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 2\} = \{2, 12\} = [12]$ pues $1 \cdot 2 = 2$
La clase del 4 es: $[4] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 4\} = \{4, 14\} = [14]$ pues $1 \cdot 4 = 4$

Las otras dos clases solo tienen un elemento:

La clase del 6 es: $[6] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 6\} = \{6\}$
La clase del 8 es: $[8] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 8\} = \{8\}$

Así, el conjunto cociente es: $A/R = \{ [x] \,/\, x \in A \} = \{[0], [2], [4], [6], [8]\}$ y su cardinal es 5.

9. Construir una función recursiva $f : \mathrm{LIST_P}(\mathbb{Z}^*) \to \mathrm{LIST_P}(\mathbb{Z})$ tal que dada una lista plana L devuelva la lista que contiene los elementos de L que son positivos por delante de la nueva lista y los que son negativos por detrás, separando ambos grupos por un **0**. Por ejemplo:

$$f([-4, 8, 2, -7]) = [8, 2, \mathbf{0}, -7, -4]$$

Evaluar detalladamente $f([-4, 8, 2, -7])$ según la función recursiva que se haya definido y construir el árbol de dependencia $T_f([-4, 8, 2, -7])$.

Podemos dar la siguiente definición recursiva de f:

$$f(\mathrm{L}) = \begin{cases} [\,0\,] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} = 0 \quad (\mathrm{RB}) \\ [\mathrm{CAB(L)}] \parallel f(\mathrm{RESTO(L)}) & \text{si } \mathrm{CAB(L)} > 0 \quad (\mathrm{RR}_1) \\ f(\mathrm{RESTO(L)}) \parallel [\mathrm{CAB(L)}] & \text{si } \mathrm{CAB(L)} < 0 \quad (\mathrm{RR}_2) \end{cases}$$

Se realizan las evaluaciones pedidas indicando en cada paso la regla que se utiliza. En cada caso, hay llamadas de la función f a listas de menor longitud. Después de llegar a la regla básica se realiza el "remonte", indicado con flechas, para obtener el resultado de la evaluación.

$$f([-4, 8, 2, -7]) \underset{\mathrm{RR}_2}{=} f([8, 2, -7]) \parallel [-4] = [8, 2, 0, -7] \parallel [-4] = [8, 2, 0, -7, -4]$$

$$f([8, 2, -7]) \underset{\mathrm{RR}_1}{=} [\,8\,] \parallel f([2, -7]) = [\,8\,] \parallel [2, 0, -7] = [8, 2, 0, -7]$$

$$f([2, -7]) \underset{\mathrm{RR}_1}{=} [\,2\,] \parallel f([-7]) = [\,2\,] \parallel [0, -7] = [2, 0, -7]$$

$$f([-7]) \underset{\mathrm{RR}_2}{=} f([\;]) \parallel [-7] = [0] \parallel [-7] = [0, -7]$$

$$f([\;]) \underset{\mathrm{RB}}{=} [0]$$

El árbol de dependencia es: $T_f([-4, 8, 2, -7]) = $

$$\begin{array}{c} [-4, 8, 2, -7] \\ | \\ [8, 2, -7] \\ | \\ [2, -7] \\ | \\ [-7] \\ | \\ [\;] \end{array}$$

10. Se considera la función recursiva f: $\mathrm{LIST_P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathrm{LIST_P}(\mathbb{N})$ definida por:

$$f\,(\mathrm{L}, n, m) = \begin{cases} [n, m] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} = 0 & (\mathrm{RB}\ ) \\ f\,(\mathrm{RESTO(L)}, n + \mathrm{CAB\,(L)}, m) & \text{si CAB(L) es par} & (\mathrm{RR}_1) \\ f\,(\mathrm{RESTO(L)}, n, m + \mathrm{CAB\,(L)}) & \text{si CAB(L) es impar} & (\mathrm{RR}_2) \end{cases}$$

a) Evaluar detalladamente $f\,([2, 5, 3, 6, 1], 0, 0)$.
b) Describir $f\,(\mathrm{L}, 0, 0)$ siendo L una lista plana cualquiera.

a) Se realiza la evaluación de $f\,([2, 5, 3, 6, 1], 0, 0)$ indicando en cada paso la regla que se utiliza. En las dos reglas recursivas hay una llamada de la función f a la lista RESTO(L) que es de menor longitud que L. Después de llegar a la regla básica, en este caso, no es necesario realizar el "remonte", pues el resultado se ha ido almacenado en los argumentos de la función.

$$f\,([2, 5, 3, 6, 1], 0, 0) \underset{\mathrm{RR}_1}{=} f\,([5, 3, 6, 1], 0 + 2, 0) \underset{\mathrm{RR}_2}{=} f\,([3, 6, 1], 2, 0 + 5) \underset{\mathrm{RR}_2}{=} f\,([6, 1], 2, 5 + 3) \underset{\mathrm{RR}_1}{=}$$
$$\underset{\mathrm{RR}_1}{=} f\,([1], 2 + 6, 8) \underset{\mathrm{RR}_2}{=} f\,([\ \ ], 8, 8 + 1) = f\,([\ \ ], 8, 9) \underset{\mathrm{RB}}{=} [8, 9]$$

b) $f\,(\mathrm{L}, 0, 0)$ devuelve una lista de longitud 2, cuyo primer elemento es la suma de todos los pares de la lista L y el segundo la suma de todos los impares de L.

Si no hay pares o no hay impares en la lista L, $f\,(\mathrm{L}, 0, 0)$ devuelve 0 en la posición correspondiente, es decir:

$$f\,([2, 8, 6], 0, 0) = [16, 0] \qquad \text{y} \qquad f\,([3, 5], 0, 0) = [0, 8]$$

Problema 1 (12%):

Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$p \vee t \rightarrow \neg (s \wedge r),\ \ p \rightarrow w \vee s,\ \ w \vee q \rightarrow t \ \ \Rightarrow\ \ p \wedge r \rightarrow t$$

Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Entonces, incorporamos la negación de la conclusión $Q = \neg (p \wedge r \rightarrow q)$ al conjunto de premisas y debemos llegar a contradicción:

$P_1 = p \vee t \rightarrow \neg (s \wedge r)$
$P_2 = p \rightarrow w \vee s,$
$P_3 = w \vee q \rightarrow t$
$\neg Q = \neg (p \wedge r \rightarrow t)$

1.	$(p \wedge r) \wedge \neg t$	de $\neg$ Q y la equivalencia $\neg (A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
2.	$p \wedge r$	de 1 y la regla $A \wedge B \Rightarrow A$
3.	$\neg t$	de 1 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
4.	p	de 2 y la regla $A \wedge B \Rightarrow A$
5.	r	de 2 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
6.	$w \vee s$	de 4, P_2 y la regla Modus Ponens
7.	$\neg (w \vee q)$	de 3, P_3 y la regla Modus Tollens
8.	$\neg w \wedge \neg q$	de 7 y Ley de De Morgan
9.	$\neg w$	de 8 y la regla $A \wedge B \Rightarrow A$
10.	$\neg q$	de 8 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
11.	$p \vee t$	de 4 y la regla $A \Rightarrow A \vee B$
12.	$\neg (s \wedge r)$	de11, P_1 y la regla Modus Ponens
13.	$\neg s \vee \neg r$	de 12 y Ley de De Morgan
14.	$\neg s$	de 13, 5 y Silogismo Disyuntivo
15.	w	de 14, 6 y Silogismo Disyuntivo
16.	$w \wedge \neg w$	de 15, 9 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$
17.	$\perp$	de 16 y la equivalencia $A \wedge \neg A \equiv \perp$

Por tanto, la estructura deductiva es correcta.

Problema 3 (6 %):

Dado un número natural n, $n \geq 2$, se llama *composición aditiva* de n a cada manera ordenada de escribir n como suma de uno o más sumandos no nulos. Por ejemplo, el conjunto de las *composiciones* de 3 es:

$$A_3 = \left\{ \boxed{1+1+1}\,,\ \boxed{1+2}\,,\ \boxed{2+1}\,,\ \boxed{3} \right\}$$

En A_n se define la siguiente relación de orden:

$c_1 \text{ R } c_2 \Leftrightarrow c_1$ y c_2 son iguales o bien es posible obtener c_2 sumando términos consecutivos de c_1.

Por ejemplo, en A_3: $\boxed{1+1+1}$ R $\boxed{1+2}$ puesto que $1+1+1 = 1+(1+1) = 1+2$.

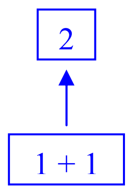
Se pide lo siguiente:

a) (*4 puntos*) Dibujar el diagrama de Hasse de A_2, de A_3 y de A_4 con la relación R.

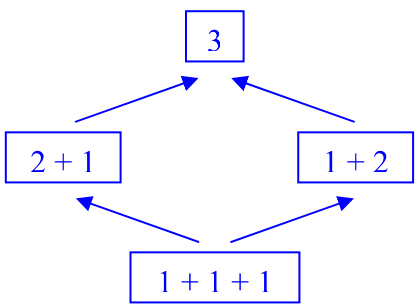
b) (*2 puntos*) Hallar los elementos notables del conjunto $A_4 - \left\{ \boxed{1+1+1+1} \right\}$.

c) (*4 puntos*) Probar que en (A_n, R) existe una cadena de n elementos, es decir, un camino de longitud $n-1$ en su diagrama de Hasse.

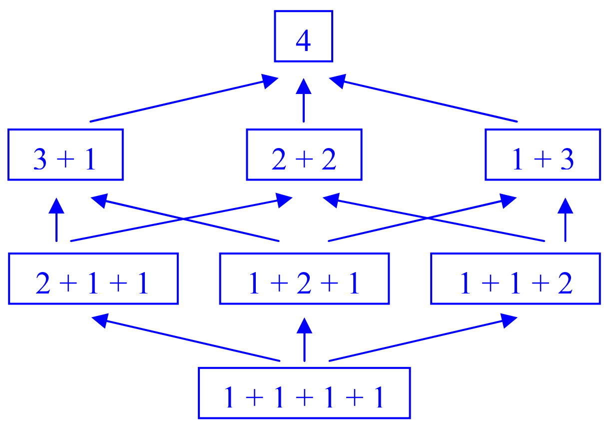
a) El diagrama de Hasse de $A_2 = \left\{ \boxed{1+1}\,,\ \boxed{2} \right\}$ es:



El diagrama de Hasse de A_3 es:



El diagrama de Hasse de A_4 es:



b) Los elementos notables del conjunto $B = A_4 - \left\{ \boxed{1+1+1+1} \right\}$ son:

$\boxed{4}$ es el máximo de B puesto que es mayor que todos los elementos de B y, por tanto, solo hay un maximal.

$\boxed{2+1+1}$, $\boxed{1+2+1}$ y $\boxed{1+1+2}$ son minimales de B puesto que no hay elementos de B que sean menores que ellos. Y como B tiene varios minimales, B no tiene máximo.

c) Para construir en A_n una cadena con n nodos basta partir del elemento $\boxed{1 + \overset{n}{\ldots} + 1}$ e ir sumando los dos primeros términos en cada paso hasta llegar a obtener n.

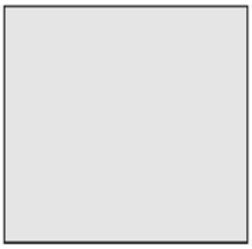
$$\boxed{1 + \overset{n}{\ldots} + 1} \rightarrow \boxed{2 + 1 + \overset{n-2}{\ldots} + 1} \rightarrow \boxed{3 + 1 + \overset{n-3}{\ldots} + 1} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{(n-1)+1} \rightarrow \boxed{n}$$

Nº sumandos: n $\quad n-1$ $\quad n-2$ $\quad 2$ $\quad 1$

Problema 2 (12%):

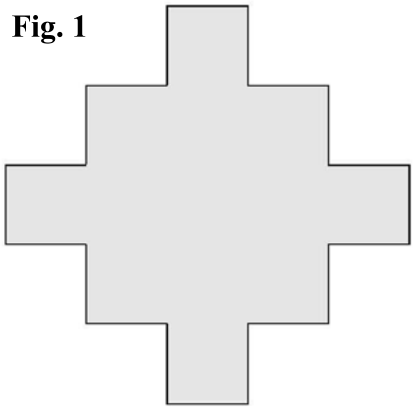
Se considera la siguiente sucesión de figuras:

Fig. 0



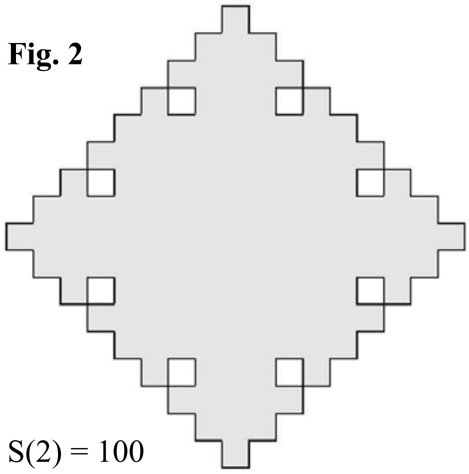
$S(0) = 4$

Fig. 1



$S(1) = 20$

Fig. 2



$S(2) = 100$

Los lados del cuadrado inicial (fig.0) miden 1 m y para obtener la figura siguiente a una dada, cada lado se divide en tres partes iguales y se sustituye el segmento central por los otros tres lados de un nuevo cuadrado cuyos lados tienen igual medida que el segmento sustituido. Se pide:

a) (*4 puntos*) Si $S(n)$ es el número de lados que tiene la figura de la etapa n-ésima, dar una expresión recursiva y una explícita de la función $S(n)$.
b) (*3 puntos*) Probar por inducción que ambas expresiones coinciden.
c) Si $L(n)$ es la longitud de cada uno de los lados de la figura de la etapa n-ésima, dar una expresión recursiva y una explícita de la función $L(n)$.

a) La construcción de las figuras sigue esta pauta: en cada etapa cada lado de una figura se divide en tres partes iguales, dos de ellas se mantienen y otra, la central, se elimina después de construir sobre ella un cuadrado. Por lo tanto, de cada lado se generan 5 nuevos lados: 2 son los extremos que se conservan y 3 son lados de un nuevo cuadrado.

Esto da lugar a la relación $S(n) = 5 \cdot S(n-1)$ y como inicialmente se parte de un cuadrado, hay 4 lados, es decir, $S(0) = 4$.

Una definición recursiva del número de lados que hay en la etapa n-ésima es:

$$S(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 0 \quad \text{(RB)} \\ 5 \cdot S(n-1) & \text{si } n > 0 \quad \text{(RR)} \end{cases}$$

Para obtener una expresión explícita se puede usar el razonamiento anterior. Como en la primera figura hay 4 lados y en cada etapa cada lado da lugar a 5 nuevos lados, se trata de una progresión geométrica de razón 5 que se puede expresar como:

$$SE(n) = 4 \cdot 5^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

También es fácil obtener esta expresión por tanteo, generando algunos valores a partir de la definición recursiva anterior y de ellos inferir la expresión explícita:

$S(0) = 4$
$S(1) = 5 \cdot S(0) = 5 \cdot 4$
$S(2) = 5 \cdot S(1) = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 5^2 \cdot 4$
$S(3) = 5 \cdot S(2) = 5 \cdot 5^2 \cdot 4 = 5^3 \cdot 4$

b) Probemos por inducción que $S(n) = SE(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

i) Paso base: $S(0) = 4$ (R.B.) y $SE(0) = 4 \cdot 5^0 = 4 \cdot 1 = 4$, luego $S(0) = SE(0)$.

ii) Paso de inducción: Sea $n \geq 0$ tal que $S(n) = SE(n)$ (H. I.).
Hay que probar que se verifica $S(n + 1) = SE(n + 1)$.

Como $n \geq 0$, $n + 1 \geq 1$ y al evaluar $S(n + 1)$ se usa la regla recursiva:

$$S(n+1) = 5 \cdot S(n) \underset{\text{H.I.}}{=} 5 \cdot SE(n) = 5 \cdot 4 \cdot 5^n = 4 \cdot 5^{n+1} = SE(n+1)$$

Por tanto queda probado que $S(n) = SE(n)$ para todo $n \geq 0$.

c) Argumentando igual que en el apartado a), de la propia construcción de las figuras se deduce la relación $L(n) = (1/3) \cdot L(n - 1)$ y como el lado del cuadrado inicial mide 1, se tiene que $L(0) = 1$. Por tanto, una definición recursiva es:

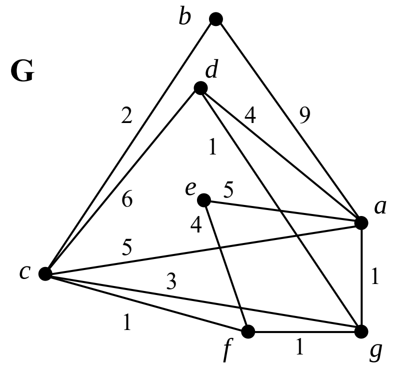
$$L(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \quad \text{(RB)} \\ \dfrac{1}{3} \cdot L(n-1) & \text{si } n > 0 \quad \text{(RR)} \end{cases}$$

Análogamente, una forma explícita es: $LE(n) = \dfrac{1}{3^n}$

Problema 4 (10%):

Una red eléctrica tiene subestaciones que controlan el flujo de energía y lo distribuyen dependiendo de la demanda que haya en las distintas zonas. Las subestaciones están unidas por cable formando una red y se comunican para saber donde desviar la energía para poder responder a la demanda de cada zona. En el grafo G siguiente aparecen las subestaciones de una región, sus conexiones y el tiempo que tardan en realizarse las comunicaciones directas entre ellas.

En la tabla siguiente, parcialmente rellena, se muestra el tiempo mínimo que hay que emplear para realizar la comunicación entre dos subestaciones cualesquiera.



	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	**r(.)**
a	**0**	**5**	**3**	**2**	**5**	**2**	**1**	**5**
b	**5**	**0**	2	5	7	3	4	**7**
c	**3**	**2**	0	3	5	1	2	**5**
d	**2**	**5**	3	0	6	2	1	**6**
e	**5**	**7**	5	6	0	4	5	**7**
f	**2**	**3**	1	2	4	0	1	**4**
g	**1**	**4**	2	1	5	1	0	**5**

a) (*4 puntos*) Aplicar el algoritmo de Dijkstra y las propiedades que sean necesarias para completar la tabla.

Aplicando el algoritmo de Dijkstra desde el vértice *a* se obtiene:

P	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	camino
a	0	9	5	4	5	∞	$\underline{\underline{1}}$	*a, g*
g	/	9	4	$\underline{\underline{2}}$	5	2	/	*a, g, d*
d	/	9	4	/	5	$\underline{\underline{2}}$	/	*a, g, f*
f	/	9	$\underline{\underline{3}}$	/	5	/	/	*a, g, f, c*
c	/	$\underline{\underline{5}}$	/	/	5	/	/	*a, g, f, c, b*
b	/	/	/	/	$\underline{\underline{5}}$	/	/	*a, e*
d(a, ·)	0	5	3	2	5	2	1	

Con estos datos se puede rellenar la fila y columna de *a* en la tabla de distancias.

Para rellenar la columna de *b* basta aplicar la propiedad simétrica de la distancia:

$$d(v, w) = d(w, v)$$

y que:

$$d(v, v) = 0$$

b) (*3 puntos*) ¿En qué subestación se debe colocar una unidad de control para que el acceso a cualquiera de las demás subestaciones sea lo más rápido posible? ¿Cuál sería el tiempo total que se tardaría en mandar desde la subestación elegida un mensaje a cada subestación y recibir la confirmación de la última, si hay que esperar la respuesta (inmediata) de cada una de ellas para enviar el siguiente mensaje inmediatamente después a la siguiente?

Como se quiere que el acceso a cualquiera de las demás subestaciones sea lo más rápido posible, hay que obtener el centro del grafo, que es el vértice que minimiza el radio de los vértices (el radio de un vértice, en este caso, da el tiempo que se requiere para que se termine la comunicación con la subestación más alejada de él).

En la primera tabla se han calculado todos los radios y el menor tiene valor 4 y se corresponde con el vértice *f* . Por tanto, *f* es el único centro de G y la unidad de control debe colocarse en él.

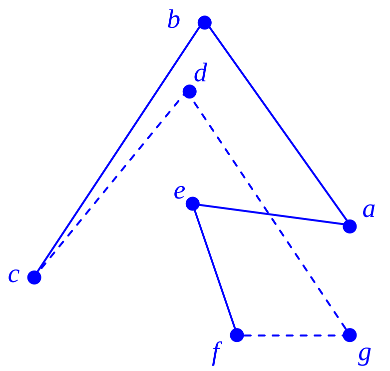
El tiempo total que se tardaría en mandar desde la unidad de control f un mensaje a cada subestación y recibir la confirmación de la última, coincide con el doble de la suma de f

$$2 \cdot s(f) = 2 \cdot (2 + 3 + 1 + 2 + 4 + 1) = 2 \cdot 13 = 26$$

c) (*3 puntos*) Se quiere comprobar el estado de la red con un dron que visite todas las subestaciones siguiendo los cables, sin pasar dos veces por la misma y volviendo al punto de partida. Estudiar si es factible y, en caso afirmativo, dar una forma de hacerlo.

En este caso hay que encontrar un ciclo hamiltoniano del grafo G, puesto que es necesario pasar por todos los nodos y volver al punto inicial.

Para construir el ciclo, se observa que las aristas adyacentes a los vértices *e* y *d* (en trazo continuo en la figura inferior) deben formar parte del ciclo pues estos vértices tienen grado dos. Y luego es fácil completar el ciclo (aristas de trazo discontinuo).



Un posible ciclo hamiltoniano es:

$$f, g, d, c, b, a, e, f$$

Por tanto, el dron podría visitar todas las subestaciones partiendo desde cualquier vértice y volver a él, siguiendo los cables (aristas) dadas en el ciclo anterior.