LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. **30/11/2015**

Preguntas de test (20%)

El coeficiente de x^4y^3 en el desarrollo de $(2x-y)^7$ es:

a) $\binom{7}{4}$ b) $-2^4\binom{7}{3}$ c) $2^4\binom{7}{4}$

B

La probabilidad de elegir un número del 1 al 100 y que sea divisible por 2 o por 5 es:

a) $\frac{50}{100}+\frac{20}{100}$ b) $\frac{50}{100}\cdot\frac{20}{100}$ c) $\frac{50}{100}+\frac{20}{100}-\frac{10}{100}$

C

La función recursiva $f:\mathrm{LIST_P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ definida por

$$f(\mathrm{L})=\begin{cases}0 & \text{si } \mathrm{L}=[\,]\\ 1 & \text{si } \mathrm{LONG(L)}=1\\ \mathrm{CAB(L)}+f(\mathrm{RESTO(L)}) & \text{en otro caso}\end{cases}$$

tiene como conjunto de partida:

a) $\{0, 1\}$ b) $\{[\,]\}$ c) $\{[\,]\}\cup\{$listas planas de longitud 1$\}$

C

Dada $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $f(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n\in\{0,1\}\\ (n+1)\cdot f(n-1) & \text{si } n\geq 2\end{cases}$ verifica:

a) $f(3) = 12$ b) $f(3) = 4$ c) No se puede calcular $f(3)$.

A

Sea P(n) una propiedad sobre el número natural n de la que se sabe que P(10) es cierta y para todo $n \geq 8$, si P(n) es cierta entonces también lo es P(n + 1). En estas condiciones, se puede garantizar que:

a) P(8) es cierta. b) P(n) es cierta para todo $n \geq 8$. c) P(n) es cierta para todo $n \geq 10$.

C

El número de reordenaciones que se pueden hacer con todas las letras de la palabra PALOMAR que no empiecen por P es:

a) $\frac{7!-6!}{2!}$ b) $7!-6!$ c) $\frac{6!}{2!}$

A

Definiciones (10%)

1. Definir conjunto de partida de una función recursiva $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$.

   Es el subconjunto de A formado por los elementos en los que f está definida de modo explícito.

2. Definir variación de r elementos de un conjunto de n elementos.

   Es una selección ordenada de r elementos distintos elegidos entre los n disponibles.

Ejercicios (30%)

1. Probar por inducción que $f(n) = g(n)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, siendo $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las funciones definidas por:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \quad \text{RB}_1 \\ 5 & \text{si } n = 1 \quad \text{RB}_2 \\ 6f(n-1) - 5f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \quad \text{RR} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = 5^n\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Paso base: Para $n = 0$ y $n = 1$ se verifica

$$f(0) \underset{\text{RB}_1}{=} 1 \ \text{ y } \ g(0) = 5^0 = 1. \text{ Por tanto, } f(0) = g(0).$$

$$f(1) \underset{\text{RB}_2}{=} 5 \ \text{ y } \ g(1) = 5^1 = 5. \text{ Por tanto, } f(1) = g(1).$$

Paso de inducción:

Tomamos $n \geq 0$ y suponemos que $f(n) = g(n)$ y $f(n+1) = g(n+1)$ (Hipótesis de Inducción)
Probemos que $f(n+2) = g(n+2)$:

Como $n \geq 0$, se tiene que $n + 2 \geq 2$ y entonces hay que usar la regla RR:

$$f(n+2) \underset{\text{RR}}{=} 6f(n+1) - 5f(n) \underset{\text{Hip. Inducción}}{=} 6\,g(n+1) - 5\,g(n) = 6 \cdot 5^{n+1} - 5 \cdot 5^n = 6 \cdot 5^{n+1} - 5^{n+1} =$$

$$= 5 \cdot 5^{n+1} = 5^{n+2} = g(n+2).$$

Entonces, el principio de inducción garantiza que la propiedad es verdadera para todo $n \geq 0$, es decir, $f(n) = g(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Construir una función recursiva $g : \mathbb{N} \to \text{LIST}(\mathbb{N})$ tal que $g(n) = [[0], [1], \ldots, [n]]$.

   Evaluar detalladamente $g(2)$ y construir el árbol de dependencia de 2 respecto de g, $T_g(2)$.

   Para $n \geq 1$, $g(n) = [[0], [1], \ldots, [n-1], [n]]$ y $g(n-1) = [[0], [1], \ldots, [n-1]]$ por lo tanto, la regla recursiva es:

$$g(n) = g(n-1) \,\|\, [\,[n]\,]$$

   La regla básica debe cerrar la recursividad: $g(1) = g(0) \,\|\, [\,[1]\,]$ y sabemos que $g(1) = [[0], [1]]$, por lo tanto, es necesario que $g(0) = [\,[0]\,]$.

   Así, la definición recursiva de g es: $$g(n) = \begin{cases} [[0]] & \text{si } n = 0 \quad \text{RB} \\ g(n-1) \,\|\, [[n]] & \text{si } n \geq 1 \quad \text{RR} \end{cases}$$

   Evaluación:

$$g(2) \underset{\text{RR}}{=} g(1) \,\|\, [\,[2]\,] = [\,[0], [1]\,] \,\|\, [\,[2]\,] = [\,[0], [1], [2]\,]$$

$$g(1) \underset{\text{RR}}{=} g(0) \,\|\, [\,[1]\,] = [[0]] \,\|\, [\,[1]\,] = [\,[0], [1]\,]$$

$$g(0) \underset{\text{RB}}{=} [[0]]$$

   El árbol de dependencia es:

$$T_g(2) = \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 0 \end{array}$$

3. Sea $f : \text{LIST}_P(\mathbb{N}) \to \text{LIST}_P(\mathbb{N})$ la correspondencia recursiva definida por

$$f\,(\text{L}) = \begin{cases} [\ ] & \text{si } \ \text{L} = [\,] \\ [\,\text{CAB}\,(\text{L})\,] \,\|\, f\,(\text{RESTO}\,(\text{RESTO}\,(\text{L}))) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que f no es función.

f no es función pues no está definida para listas de longitud 1. Para estas listas hay que utilizar la regla recursiva y al calcular RESTO(RESTO(L)) da error pues lleva a evaluar RESTO([ ]) que no está definido.

b) Añadir una regla en la definición de f de modo que sea una función recursiva tal que dada una lista plana L, devuelva la lista que contiene los elementos de L que ocupan las posiciones impares de L. Evaluar detalladamente $f\,([2, 4])$ y $f\,([2, 5, 7])$.

Hay que añadir una regla para las listas de longitud 1 y que sirva para cerrar la recursividad en la evaluación de listas de longitud impar.

Por ejemplo, $f\,([2, 5, 7])$ debe devolver [2, 7] y aplicando la regla recursiva se tiene:
$f\,([2, 5, 7]) \underset{\text{RR}}{=} [\,2\,] \,\|\, f\,([7])$. Por tanto, es necesario que $f\,([7]) = [7]$. Y en general, $f\,([a]) = [a]$.

Así, la definición es:

$$f\,(\text{L}) = \begin{cases} [\ ] & \text{si } \ \text{L} = [\,] & \text{RB}_1 \\ \text{L} & \text{si } \ \text{LONG}(\text{L}) = 1 & \text{RB}_2 \\ [\,\text{CAB}\,(\text{L})\,] \,\|\, f\,(\text{RESTO}\,(\text{RESTO}\,(\text{L}))) & \text{en otro caso} & \text{RR} \end{cases}$$

Evaluaciones pedidas:

Para listas de longitud par se termina la recursividad con la regla básica 1.

$$f\,([2, 4]) \underset{\text{RR}}{=} [\,2\,] \,\|\, f\,([\ ])$$

$$f\,([\ ]) \underset{\text{RB}_1}{=} [\ ]$$

$$f\,([2, 4]) = [\,2\,] \,\|\, [\ ] = [\,2\,]$$

Para listas de longitud impar se termina la recursividad con la regla básica 2.

$$f\,([2, 3, 7]) \underset{\text{RR}}{=} [\,2\,] \,\|\, f\,([7])$$

$$f\,([7]) \underset{\text{RB}_2}{=} [\,7\,]$$

$$f\,([2, 3, 7]) = [\,2\,] \,\|\, [7] = [2, 7]$$

4. Juan y sus amigos juegan a las cartas con una baraja española y en cada reparto cada uno recibe 5 cartas ¿En cuántos casos Juan tiene al menos 4 oros?

NOTA: La baraja española consta de cartas de cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos, y hay 10 cartas de cada uno de ellos.

Para tener al menos cuatro oros puede ocurrir que Juan tenga 4 o 5 oros. Entonces, buscamos el cardinal del conjunto $A \cup B$ siendo:

A = {conjuntos de 5 cartas con exactamente 4 oros}

B = {conjuntos de 5 cartas con exactamente 5 oros}

Y como son disjuntos por el Principio de Adición se tiene: $|A \cup B| = |A| + |B|$

Basta entonces con calcular los cardinales de los conjuntos A y B.

Para calcular el cardinal de A utilizamos el Principio de Multiplicación.

Paso 1: Elegir 4 oros distintos entre los 10 que hay, sin orden pues en la mano de Juan éste no es relevante. Por ello, hay $C(10, 4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$ formas.

Paso 2: Elegir la quinta carta entre las 30 cartas de los otros 3 palos. Obviamente, hay 30 formas por cada una de las anteriores.

Y puede aplicarse el Principio de Multiplicación pues todos los resultados son distintos, ya que o bien se eligen 4 oros distintos o bien la otra carta es distinta.

Así, $|A| = C(10, 4) \cdot 30 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot 30$

$|B| = C(10, 5) = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!}$ pues basta elegir 5 oros entre los 10 que hay, de nuevo sin orden.

Finalmente, por el principio de adición:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = \binom{10}{4} \cdot 30 + \binom{10}{5} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot 30 + \frac{10!}{5! \cdot 5!}$$

Problema 1 (20%):

a) (*4 puntos*) Definir razonadamente una función recursiva $f : \text{LIST}_P(\mathbb{Z}) \to \text{LIST}_P(\mathbb{Z})$ tal que, dada una lista plana no vacía de enteros, L, devuelva la lista resultante de eliminar en L el número "2" todas las veces que aparezca y de sustituir el número "7" por la secuencia "3, 4", cada vez que aparezca.

Buscamos primero las reglas recursivas.

1. Para que se elimine el "2" y siga evaluando debe ser:

$$f(\text{L}) = f(\text{RESTO(L)}), \quad \text{si CAB(L)} = 2$$

2. Para que sustituya el "7" por "3, 4" y siga evaluando:

$$f(\text{L}) = [\,3, 4\,] \,\|\, f(\text{RESTO (L)}), \quad \text{si CAB(L)} = 7$$

3. Para conservar aquellos caracteres que no son ni 2 ni 7:

$$f(\text{L}) = [\,\text{CAB (L)}\,] \,\|\, f(\text{RESTO (L)}), \quad \text{si CAB(L)} \neq 2, 7$$

Para cerrar la recursividad la regla básica debe ser: $f([\ \ ]) = [\ \ ]$.

Por tanto, una posible definición es:

$$f(\text{L}) = \begin{cases} [\ \ ] & \text{si } \text{L} = [\ ] & \text{RB} \\ f(\text{RESTO (L)}) & \text{si CAB (L)} = 2 & \text{RR}_1 \\ [\,3, 4\,] \,\|\, f(\text{RESTO (L)}) & \text{si CAB (L)} = 7 & \text{RR}_2 \\ [\,\text{CAB (L)}\,] \,\|\, f(\text{RESTO (L)}) & \text{en otro caso} & \text{RR}_3 \end{cases}$$

b) (*3 puntos*) Dar una fórmula para la longitud de f (L) en términos de la longitud de L y los valores que sean necesarios. Dar dos listas de longitud 5, L_1 y L_2, tales que:

$$\text{LONG}(\,f(\text{L}_1)\,) = 9 \quad \text{y} \quad \text{LONG}(\,f(\text{L}_2)\,) = 11.$$

O bien, justificar que no es posible encontrarlas.

Cada vez que aparece "2" en la lista L, la longitud de f (L) disminuye en 1, pues el 2 se elimina. Cada vez que aparece "7" en la lista L, la longitud de f (L) aumenta en 1, pues el 7 se sustituye por dos elementos, "3" y "4".

Por tanto, si n = LONG (L), r = nº de veces que aparece el "2" en L y s = nº de veces que aparece el "7" en L, se tiene que: LONG (f (L)) = $n - r + s$.

Busquemos L_1 tal que LONG (L_1) = 5 y LONG($f(\text{L}_1)$) = 9:

Debe verificarse que, $9 = 5 - r + s$ y basta tomar $r = 0$ y $s = 4$.

Es decir, basta que L_1 no contenga al 2 y tenga cuatro apariciones del 7:

$$\text{L}_1 = [1, 7, 7, 7, 7] \ \text{ y } \ f(\text{L}_1) = [1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4]$$

La longitud máxima de f (L) es $2 \cdot$ LONG(L) y ocurre cuando todos los elementos son 7.

Por tanto, L_2 no existe pues LONG($f(\text{L}_2)$) = 11 > 10

c) (*3 puntos*) Extender la definición de f a listas no planas.

Para extender f a listas no planas buscamos una(s) regla(s) recursiva(s) para el caso en que CAB(L) sea una lista.

En ese caso, la función debe hacer lo mismo en la lista CAB(L) y concatenarlo, sin aplanar la lista, con el resultado de hacer lo mismo en el resto de la lista. Es decir:

$$f\,(\mathrm{L}) = [\ f\,(\mathrm{CAB}\,(\mathrm{L}))\ ] \,\|\, f\,(\mathrm{RESTO}\,(\mathrm{L})) \quad \text{si} \quad \mathrm{LISTA}(\,\mathrm{CAB}\,(\mathrm{L})) = 1$$

Por tanto, una definición recursiva que verifica lo pedido es:

$$f\,(\mathrm{L}) = \begin{cases} [\ \ ] & \text{si } \ \mathrm{L} = [\ ] & \mathrm{RB} \\ f\,(\mathrm{RESTO}\,(\mathrm{L})) & \text{si } \mathrm{LISTA}(\mathrm{CAB}(\mathrm{L})) = 0 \text{ y } \mathrm{CAB}\,(\mathrm{L}) = 2 & \mathrm{RR}_1 \\ [\,3, 4\,] \,\|\, f\,(\mathrm{RESTO}\,(\mathrm{L})) & \text{si } \mathrm{LISTA}(\mathrm{CAB}(\mathrm{L})) = 0 \text{ y } \mathrm{CAB}\,(\mathrm{L}) = 7 & \mathrm{RR}_2 \\ [\ \mathrm{CAB}\,(\mathrm{L})\ ] \,\|\, f\,(\mathrm{RESTO}\,(\mathrm{L})) & \text{si } \mathrm{LISTA}(\mathrm{CAB}(\mathrm{L})) = 0 \text{ y } \mathrm{CAB}\,(\mathrm{L}) \neq 2, 7 & \mathrm{RR}_3 \\ [\ f\,(\mathrm{CAB}\,(\mathrm{L})\,)\ ] \,\|\, f\,(\mathrm{RESTO}\,(\mathrm{L})) & \text{si } \mathrm{LISTA}(\mathrm{CAB}(\mathrm{L})) = 1 & \mathrm{RR}_4 \end{cases}$$

Problema 2 (20%):

Un grupo de 6 amigos van a quedar para comer y quieren ir a uno de los 12 restaurantes del barrio.

a) (*4 puntos*) Para elegirlo deciden realizar una votación de modo que cada uno vota a un solo restaurante:

¿Cuántas votaciones distintas puede haber:

- si votan a mano alzada?
- si introducen su voto en un sombrero y luego hacen el recuento de votos, para que la elección sea anónima?

- Si votan a mano alzada, un posible resultado es: R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6. En este caso, la primera persona ha elegido R_1, la segunda R_2, …. Y si cambiamos el orden, por ejemplo, R_6 R_2 R_3 R_4 R_5 R_1 es una votación diferente de la anterior. Por tanto, el orden influye.
  También es posible que varias personas elijan el mismo restaurante, incluso que todas elijan el mismo. Por ejemplo, R_1 R_1 R_1 R_4 R_5 R_6 o R_1 R_1 R_1 R_1 R_1 R_1.

  Por tanto, se trata de variaciones con repetición de 12 elementos elegidos de 6 en 6 y su número es: $VR(12, 6) = 12^6$

- Si introducen su voto en un sombrero, los resultados ya no se distinguen por el orden y se trata por tanto de las combinaciones con repetición de 12 elementos elegidos de 6 en 6 y su número es:

$$CR(12, 6) = PR(11 + 6, 11, 6) = \frac{17!}{11! \cdot 6!}$$

b) (*4 puntos*) El restaurante finalmente elegido dispone en su carta de 12 primeros platos, 14 segundos y 9 postres. Deciden elegir tres primeros distintos para compartir y que cada uno elija su segundo y su postre. ¿Cuántas comandas distintas le pueden llegar al cocinero?

Utilizamos el principio de multiplicación, ya que cada comanda se puede ver como una terna de peticiones. La primera (Paso 1) selecciona los tres primeros platos, la segunda (Paso 2) selecciona 6 segundos platos y la tercera (Paso 3) selecciona 6 postres. Los resultados serán distintos pues, o no se eligen los mismos 3 primeros platos, o alguno cambia la elección de su segundo plato o de su postre.

Paso 1: Elegir los tres primeros platos. Como se trata de saber qué pedidos se hacen al cocinero hay que elegir 3 platos entre los 12 posibles y el orden no hace que varíe el resultado, por tanto, se trata de combinaciones y sin repetición pues deben ser distintos.

Hay $C(12, 3) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!}$ posibilidades.

Paso 2: Elegir los segundos platos. Cada uno elige el suyo y puede haber repeticiones. De nuevo al cocinero le da igual quién pidió cada plato y el orden no influye. Se trata de $CR(14, 6) = \frac{19!}{13! \cdot 6!}$.

Paso 3: Elegir los 6 postres. Análogamente se trata de $CR(9, 6) = \frac{14!}{8! \cdot 6!}$.

Entonces, por el principio de multiplicación el número de comandas que puede recibir el cocinero es $C(12, 3) \cdot CR(14, 6) \cdot CR(9, 6)$.

c) (*2 puntos*) Antes de pedir la cuenta deciden elegir a tres de ellos de modo que uno no pague, otro pague sólo 1/12 de la cuenta y el otro sólo 2/12 de ésta. Los otros comensales deberán abonar el resto de la cuenta a partes iguales. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar los tres que pagan menos que los demás?

Los que pagan menos deben ser tres personas distintas elegidas entre los 6 amigos y el orden influye pues no van a pagar lo mismo.

Se trata, por tanto, de variaciones sin repetición de 6 tomados de 3 en 3.

Y su número es: $V(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4$.