Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

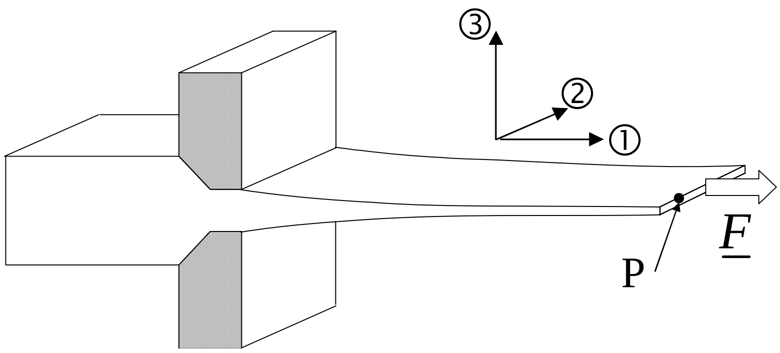
- **sólo se calificarán los problemas en los que se haya marcado una respuesta. Si la opción elegida es "*ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:*", la respuesta debe aparecer sobre la línea de puntos inmediatamente a continuación.**
- **sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos. Usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, no usar ningún otro papel**
- **80 min, 0.5 puntos cada problema**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba. Las preactas se publicarán no más tarde del día 31 de julio y la revisión de examen será el 10 de septiembre a las 13:00 horas en la sala R1.

1. Un termoplástico fundido se procesa (conforma) en forma de lámina tirando de él por una ranura, como se indica en la figura. El espesor de la lámina en el punto P es $\delta = 1.2 \times 10^{-3}$ m y su anchura es muy grande comparada con el espesor, de modo que puede considerarse que las caras 2 de la lámina no son superficies libres. El perfil de velocidad del material en el punto P es:

$$v_1(x_1, x_2, x_3) = kx_1$$
$$v_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$v_3(x_1, x_2, x_3) = -kx_3$$

donde *k* es una constante $k = 0.23$ s^{-1}. El polímero se comporta como un fluido newtoniano de viscosidad $\eta = 210$ Pa s. Calcular el módulo F de la fuerza necesaria para llevar a cabo esta operación de conformado por metro de anchura de lámina.



- 0.928 N
- 0.464 N
- 0.116 N
- 0.058 N
- 0.232 N
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:..

Sol.: si el fluido es newtoniano, la tensión mecánica depende del gradiente de velocidad según:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\eta \dot{\underline{\underline{\gamma}}} = -\eta \left[\nabla \underline{v} + \left(\nabla \underline{v} \right)^T \right]$$

Para el campo de velocidad dado, $\left[\!\left[\nabla \underline{v} \right]\!\right] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\!\left[\underline{\underline{\tau}} \right]\!\right] = \begin{bmatrix} -2k\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k\eta \end{bmatrix}$

La tensión mecánica total está dada por la que proviene de la ecuación constitutiva más un término isótropo (hidrostático) en el caso de que haya superficies libres.

$$\underline{\underline{\tau}}^{tot} = \underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{\delta}}$$

En esta aplicación, las caras de la lámina perpendiculares al eje 3 son superficies libres y en ellas la tensión normal debe ser igual a la ambiente (tomada como referencia = 0). Para hacer nula la componente 33 de τ es preciso añadir un término hidrostático con p=-2kη, con lo que resulta:

$$\left[\!\left[\underline{\underline{\tau}}^{tot} \right]\!\right] = \left[\!\left[\underline{\underline{\tau}} \right]\!\right] - 2k\eta \left[\!\left[\underline{\underline{\delta}} \right]\!\right] = \begin{bmatrix} -4k\eta & 0 & 0 \\ 0 & -2k\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fuerza será igual a la componente 11 de la tensión, multiplicada por el área de la sección transversal al eje 1, de un metro de anchura de lámina y espesor δ. Su módulo es:

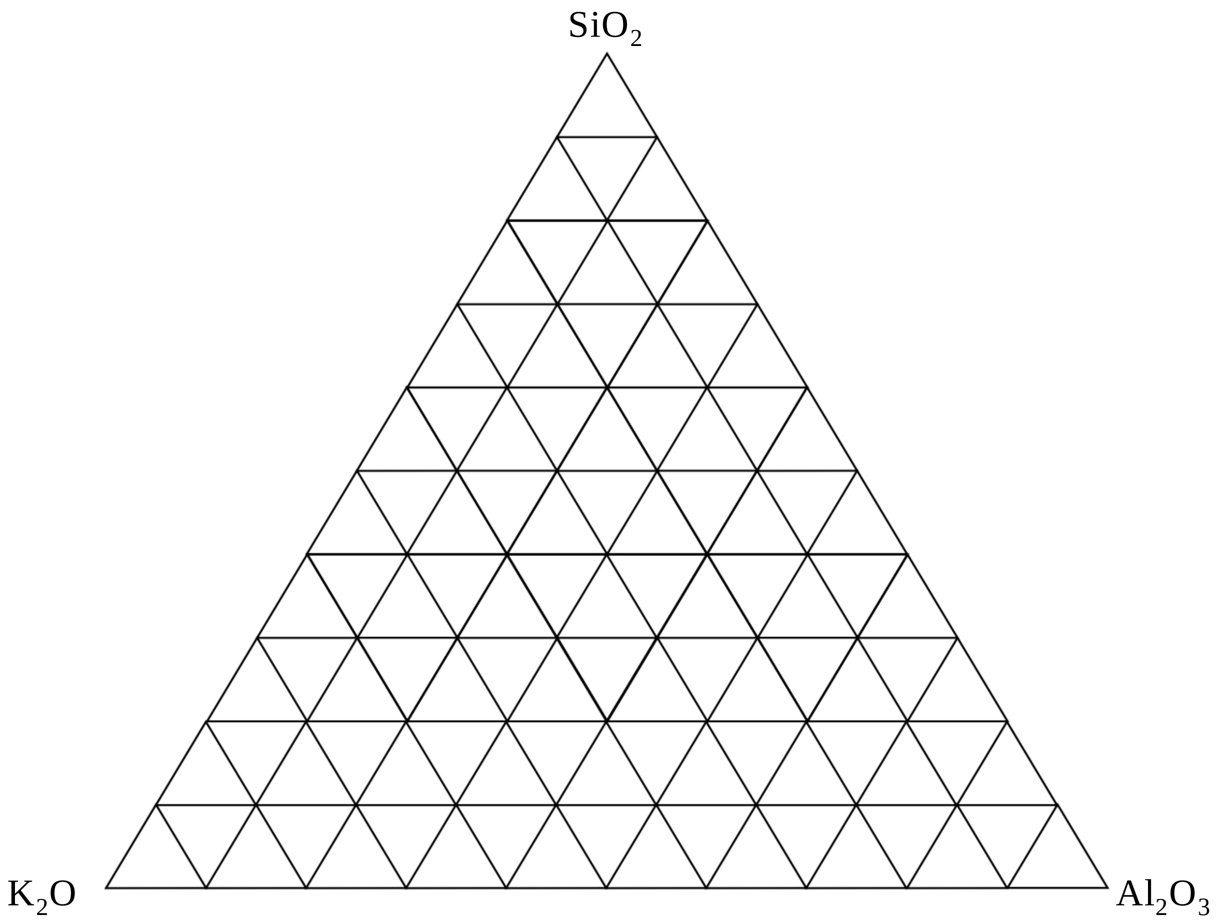
$F = 1 \cdot \delta \cdot 4k \cdot \eta$ $\quad F = 0.232 \quad$ N

---

2. Se quiere obtener una porcelana a partir de leucita ($K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 4SiO_2$) y mullita ($3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$). Para asegurar su dureza, la porcelana debe tener una fracción másica de SiO_2 (A) mínima de $X_{SiO2} = 0.4$.

Determinar cuántos kg de leucita se necesitan como mínimo para obtener 100 kg de porcelana. Este problema se puede solucionar analíticamente o con ayuda del diagrama ternario adjunto.
Usar las masas atómicas: $Mw_K = 39$, $Mw_O = 16$, $Mw_{Si} = 28$, $Mw_{Al} = 27$ kg/kmol.

- 44.02 kg
- 21.69 kg
- 36.58 kg
- 62.62 kg
- 51.46 kg
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:..



Sol.: para obtener 100 kg de porcelana se necesitan L kg de leucita y M kg de mullita: $L + M = 100$
Se calculan primero las masas moleculares de los componentes:

$Mw_{K2O} = 94$ kg/kmol $Mw_{Al2O3} = 102$ kg/kmol $Mw_{SiO2} = 60$ kg/kmol

y a partir de ello las fracciones másicas de SiO_2 en ambas materias primas:

$$X_{SiO2\_L} = \frac{4Mw_{SiO2}}{Mw_{K2O} + Mw_{Al2O3} + 4\cdot Mw_{SiO2}} \qquad X_{SiO2\_L} = 0.55$$

$$X_{SiO2\_M} = \frac{2Mw_{SiO2}}{3\cdot Mw_{Al2O3} + 2\cdot Mw_{SiO2}} \qquad X_{SiO2\_M} = 0.282$$

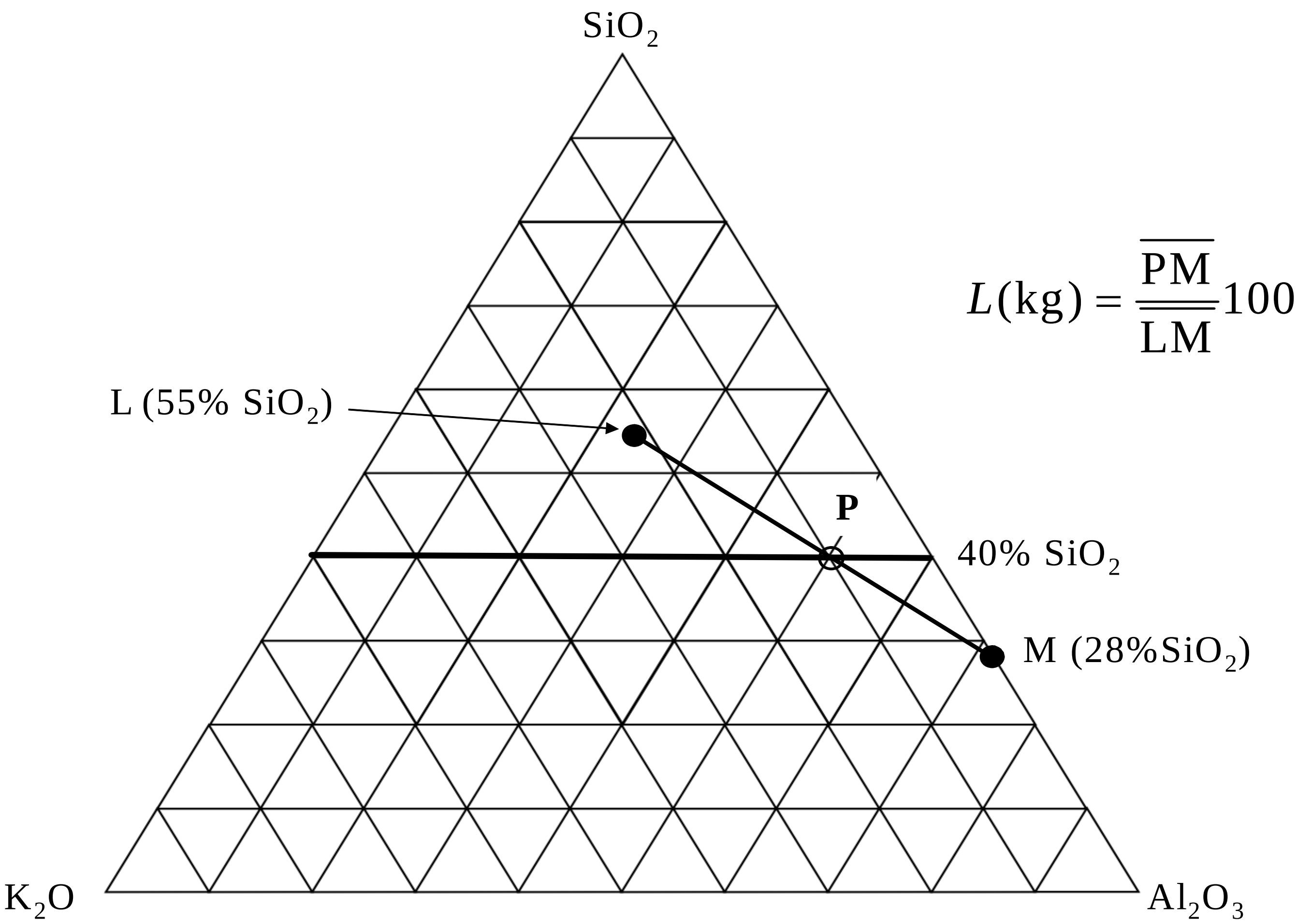
De un balance de sílice resulta:

$$X_{SiO2\_L}\cdot L + X_{SiO2\_M}\cdot M = 100X_{SiO2} \qquad M = 100 - L$$

y despejando L:

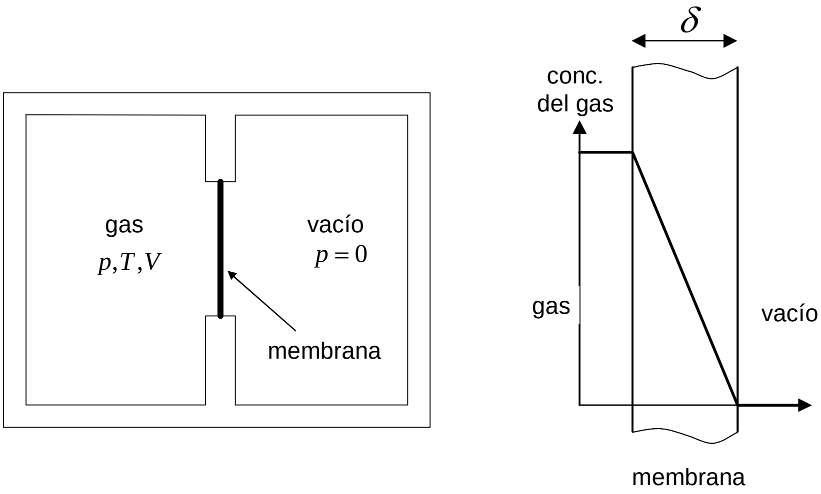
$$L = 100\cdot\frac{X_{SiO2} - X_{SiO2\_M}}{X_{SiO2\_L} - X_{SiO2\_M}} \qquad L = 44.019 \text{ kg}$$

Gráficamente, se sitúan las composiciones de la leucita y de la mullita en el diagrama y se traza el segmento que las une. La composición de la porcelana P está en la intersección de este segmento con la especificación de la fracción de sílice en P. Por la regla de la palanca se determina L (kg):



3. El método más usado para medir la difusividad de un gas D (m^2/s) a través de un material sólido consiste en medir a qué velocidad va disminuyendo la presión del gas (dp/dt, en bar/s) de un volumen V que está separado de otro a vacío por una membrana del material, de área $A = 1.7 \times 10^{-4}$ m^2 (ver figura), y relacionar esta velocidad con D.

En un experimento se observa que cuando la presión es $p = 1.2$ bar, ésta disminuye a $1.34 \cdot 10^{-5}$ bar/s. El espesor de la membrana es $\delta = 1.6 \times 10^{-3}$ m, la temperatura $T = 298$ K (constante) y el volumen $V = 2.3 \times 10^{-4}$ m^3. Calcular D (m^2/s) si el material de la membrana es isótropo, el perfil de concentración en la membrana es lineal, el gas es ideal y la difusión obedece la ley constitutiva de Fick



- $1.62 \cdot 10^{-8}$ m^2/s
- $5.23 \cdot 10^{-7}$ m^2/s
- $6.6 \cdot 10^{-8}$ m^2/s
- $9.87 \cdot 10^{-8}$ m^2/s
- $2.01 \cdot 10^{-8}$ m^2/s
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:...

Sol.: si el material es isótropo y el perfil de concentración es lineal, la ley de Fick se simplifica a:

$$\underline{J}_{gas} = -\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\nabla} C \quad \Rightarrow \quad J_{gas} = -D\frac{0-C}{\delta} = D\frac{C}{\delta}$$

El balance de masa de gas en el volumen V es:

velocidad de acumulación (kg/s) = - velocidad de salida (kg/s)

$$\underbrace{\frac{d(VC)}{dt}}_{\substack{\text{velocidad de variación}\\ \text{de la masa de gas}}} = -\underbrace{J_{gas}}_{\text{flujo}}\underbrace{A}_{\text{área}} = -D\frac{C}{\delta}A$$

La velocidad de acumulación es negativa porque el volumen pierde gas por difusión.

La concentración (kg/m^3) en el interior, que al ser un gas puro es igual a la densidad, se obtiene de la ecuación de estado del gas ideal:

$$C = \rho = \frac{pM_w}{RT}$$

La concentración y la presión sólo difieren en una constante. La expresión anterior se sustituye en la ecuación de balance y se obtiene la variación de la presión con el tiempo (dp/dt):

$$\frac{d(V\rho)}{dt} = -D\frac{\rho}{\delta}A \quad \Rightarrow \quad V\frac{dp}{dt} = -D\frac{p}{\delta}A \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{V\delta}{pA}\frac{dp}{dt}$$

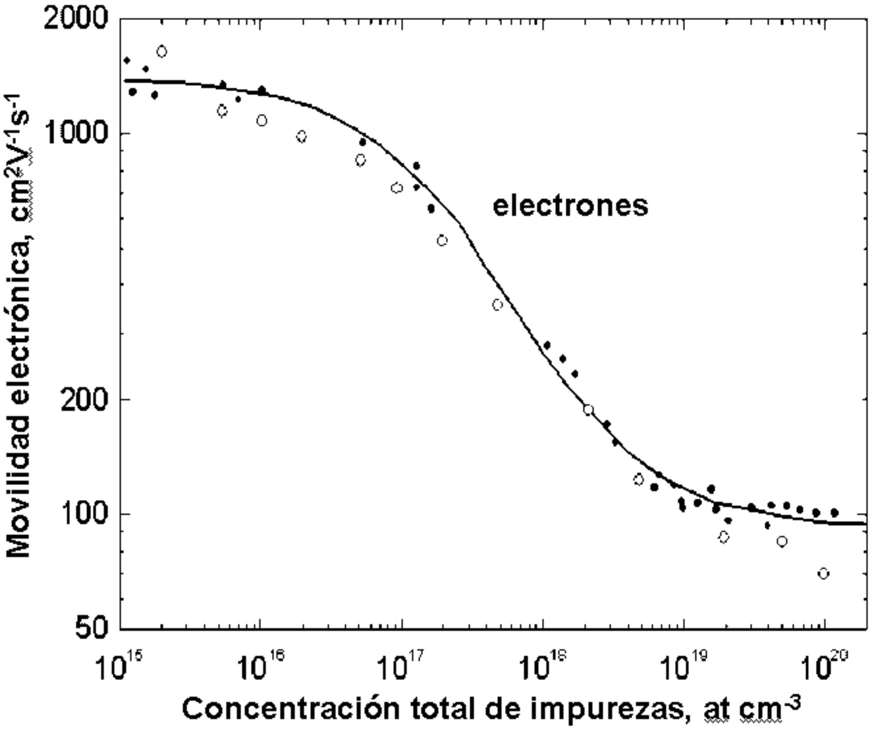
de donde: $D = -\frac{V\cdot\delta}{p\cdot A}\left(-1.34\cdot 10^{-5}\right)$ $D = 2.417\times 10^{-8}$ m^2/s

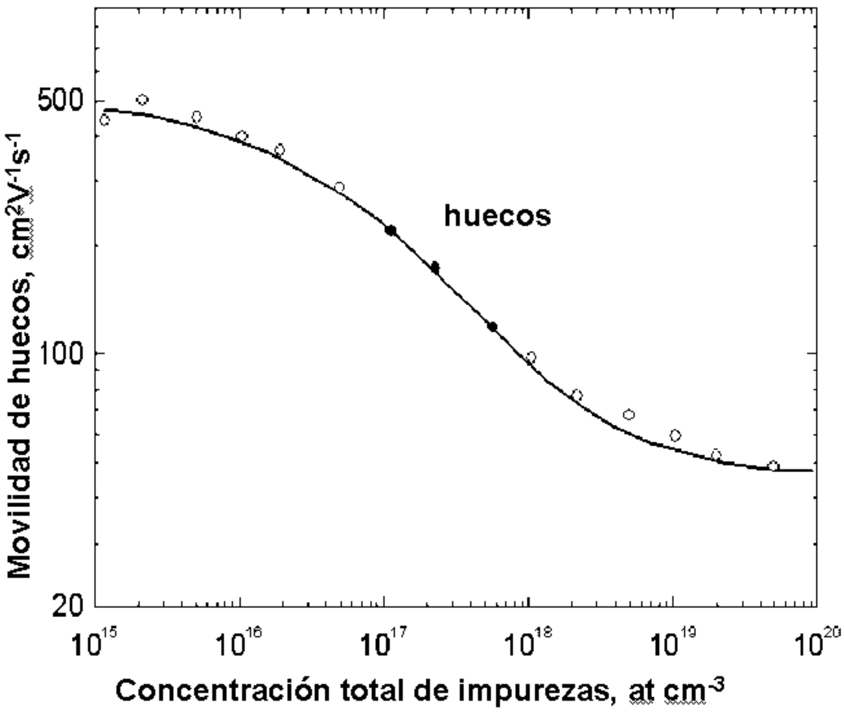
4. Un semiconductor de Si se dopa con $N_{In} = 2.9\times 10^{23}$ átomos de indio por m^3 y con

$N_{Se} = 1.3\times 10^{22}$ átomos de selenio por m^3.

Determinar a 300 K, y suponiendo ionización total de ambos dopantes, la conductividad eléctrica del semiconducto extrínseco. Leer las movilidades de portadores de carga en las gráficas adjuntas indicando cláramente cómo se han hecho las lecturas (incluyendo las medidas obtenidas en milímetros o centímetros).

- 2264.75 S/m
- 683.86 S/m
- 2158.03 S/m
- 1031.02 S/m
- 651.76 S/m
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:...





Sol.: se trata de un semiconductor extrínseco tipo p. La concentración de portadores de carga mayoritarios es:

$p_p = N_{In} - 2 \cdot N_{Se}$ $\qquad p_p = 2.64 \times 10^{23}$ portadores/m^3

Para calcular la conductividad eléctrica del semiconductor extrínseco según:

$$\sigma = q \cdot p_p \cdot \mu_p$$

se necesita primero leer del diagrama (en el diagrama las unidades son átomos/cm^3 y cm^2/V s) la movilidad de los huecos para una concentración total de impurezas de :

$C_T = N_{In} + N_{Se}$ $\qquad C_T = 3.03 \times 10^{23}$ átomos/m^3

lectura: $\mu_p = 10^{2+\frac{\delta}{\Lambda}} = 10^{2+\frac{8.5}{45}}$ cm^2 / V s $\qquad \mu_p = 0.015$ m^2/V s

luego: $\sigma = q \cdot p_p \cdot \mu_p$ $\qquad \sigma = 651.763$ S/m

5.Una esfera de circonia monoclínica de radio $R = 0.02$ m es calentada $\Delta T = 200$ K por encima de la temperatura ambiente y, como consecuencia del calentamiento, se deforma. Determinar la variación del radio de la esfera ΔR (m) en una dirección $\underline{n}$ que forma un ángulo $\theta_3 = 120$ º con el eje convencional 3 y un ángulo de 90 º con el eje convencional 2.

Se conocen las componentes del coeficiente de expansión térmica de la circonia monoclínica (todos en K^{-1}) referidas a los ejes convencionales del material:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2.2\times 10^{-5} & 0 & 1.1\times 10^{-5} \\ 0 & 1.7\times 10^{-5} & 0 \\ 1.1\times 10^{-5} & 0 & 8.9\times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

- $1.550\cdot 10^{-4}$ m
- $1.169\cdot 10^{-4}$ m
- $2.032\cdot 10^{-4}$ m
- $1.359\cdot 10^{-4}$ m
- $1.741\cdot 10^{-4}$ m
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:..

Sol.: el material es monoclínico y se deforma, como consecuencia del incremento de temperatura, de modo diferente en cada dirección según la ley constitutiva:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}}\,\Delta T$$

La variación del radio de la esfera en una dirección dada se calcula a partir del valor de ε (tensor de 2º orden, simétrico) en esa dirección:

$$\Delta R = R\,\varepsilon_{\underline{n}} = R\,\varepsilon_{ij}\,l_j l_i = R\,\Delta T \alpha_{ij}\,l_j l_i$$

donde las l_i son las componentes (cosenos directores) del vector unitario $\underline{n}$ que apunta en la dirección en la que se quiere calcular la deformación. Los cosenos directores de la dirección $\underline{n}$ son:

$$l_1 = \cos\left(\theta_3\cdot\frac{\pi}{180} - \frac{\pi}{2}\right) \qquad l_2 = 0 \qquad l_3 = \cos\left(\theta_3\cdot\frac{\pi}{180}\right)$$

$$l_1 = 0.866 \qquad l_2 = 0 \qquad l_3 = -0.5$$

Por tanto, la variación del radio en la dirección $\underline{n}$ es:

$$R\cdot\Delta T\cdot\left(l_1^{\,2}\alpha_{11} + l_3^{\,2}\alpha_{3,3} + 2l_1\cdot l_3\alpha_{13}\right) = 1.169\times 10^{-4} \qquad \text{m}$$

---

6. El PVDF (-CF_2-CH_2-)$_n$ es un polímero sintético que tiene morfología semicristalina y en el que cada cristal presenta una polarización espontánea. Se procesa en forma de láminas aplicando simultáneamente un campo eléctrico, alta temperatura y una fuerza de tracción tal y como se indica en la figura 1. De esta forma se consigue alinear las cadenas del polímero en la dirección del estiramiento y orientar el dipolo molecular en la dirección del campo eléctrico (figura 2).

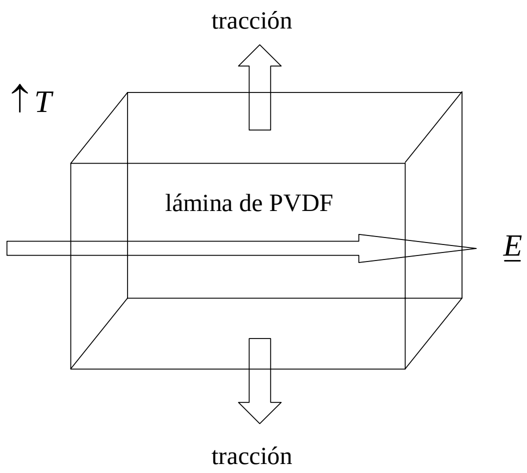


Figura 1

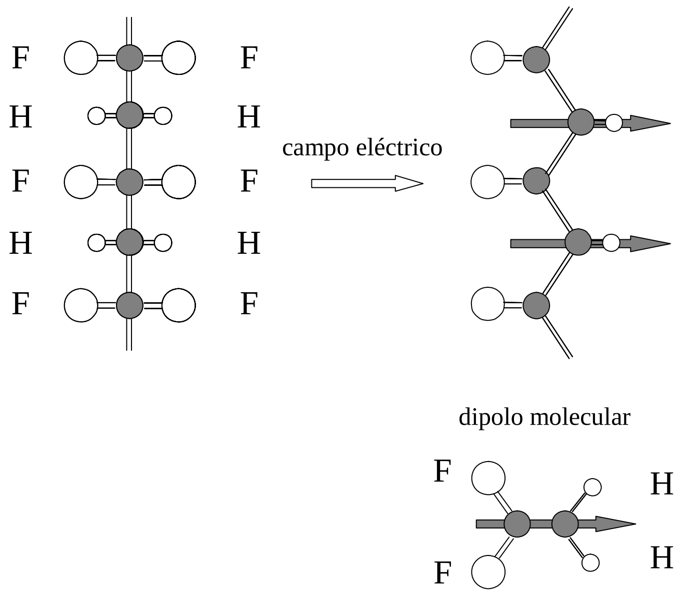


Figura 2

Utilizando notación tensorial, determinar las componentes de la respuesta eléctrica de este material ferroeléctric después de procesarlo del modo descrito, ante compresión hidrostática.

- $P_3 = -p\left(2d_{311} + d_{333}\right)$ y $P_1 = P_2 = 0$ C/m^2
- $P_1 = P_2 = P_3 = 0$
- $P_2 = -p\left(d_{211} + d_{222} + d_{233}\right)$ y $P_1 = P_3 = 0$ C/m^2
- $P_1 = -p\left(d_{111} + d_{122} + d_{133}\right)$, $P_2 = 0$ y $P_3 = -p\left(d_{311} + d_{322} + d_{333}\right)$ C/m^2
- $P_1 = -p\left(d_{111} - d_{122}\right)$ y $P_2 = P_3 = 0$ C/m^2
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es: ....

Sol.: el material ferroeléctrico así procesado, con estiramiento en una dirección y con orientación de los dipolos moleculares según la dirección de un campo eléctrico perpendicular a la dirección de estiramiento, es de la clase cristalográfica $mm2$. Su respuesta ante compresión hidrostática,

aplicando la ley de la piezoelectricidad directa, es:

$$\underline{P} = \underset{\sim}{d}\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{24} & \cdot & \cdot \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ -p \\ -p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{31} + d_{32} + d_{33} \end{bmatrix}$$

La respuesta eléctrica es una polarización en la dirección 3 convencional, que coincide con el eje de rotación binario del material, que a su vez coincide con la dirección del campo aplicado:

$$P_3 = -p\left(d_{311} + d_{322} + d_{333}\right) \text{ C/m}^2$$

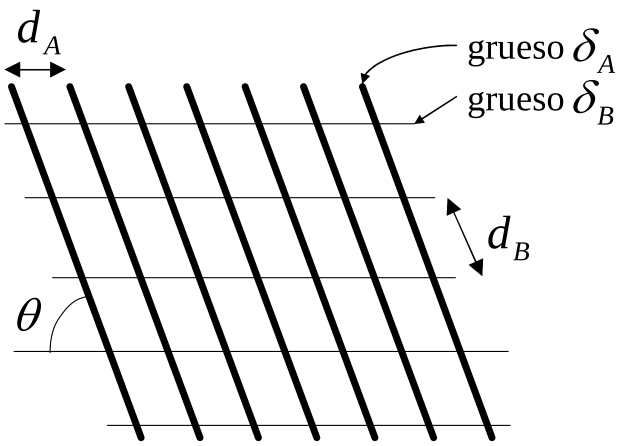
y las otras dos componentes son nulas.

---

7. Un compuesto C está fabricado con dos capas paralelas:

- la primera capa (no representada) es una lámina de espesor uniforme de un material isótropo, sin perforaciones ni ningún tipo de estructura.
- la segunda es un tejido plano (no se tiene en cuenta que los hilos y contrahilos pasan unos por encima de otros). En el caso general (figura) los hilos y contrahilos son de diferentes grosores δ_A y δ_B, tienen diferentes espaciamientos d_A y d_B, y se cruzan con un ángulo θ. Determinar a qué clase pertenece el compuesto C cuando $d_A \neq d_B$, $\theta = 45^o$ y $\delta_A \neq \delta_B$.

- mm2
- 1
- m
- 2/m
- 222
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:..



Sol.: sólo existe un eje binario perpendicular al plano del tejido, es decir, es la clase 2.

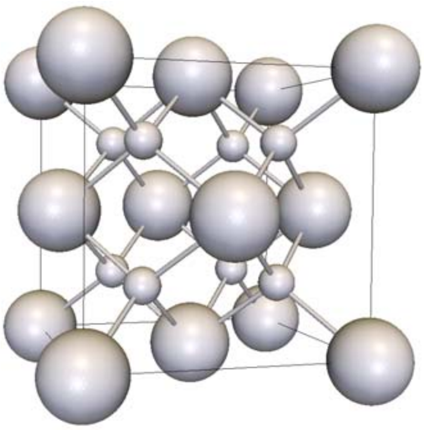
8. Determinar la densidad iónica superficial del plano (1 4 0) para cada tipo de ión en un material AB_2 que cristaliza en una estructura tipo fluorita.

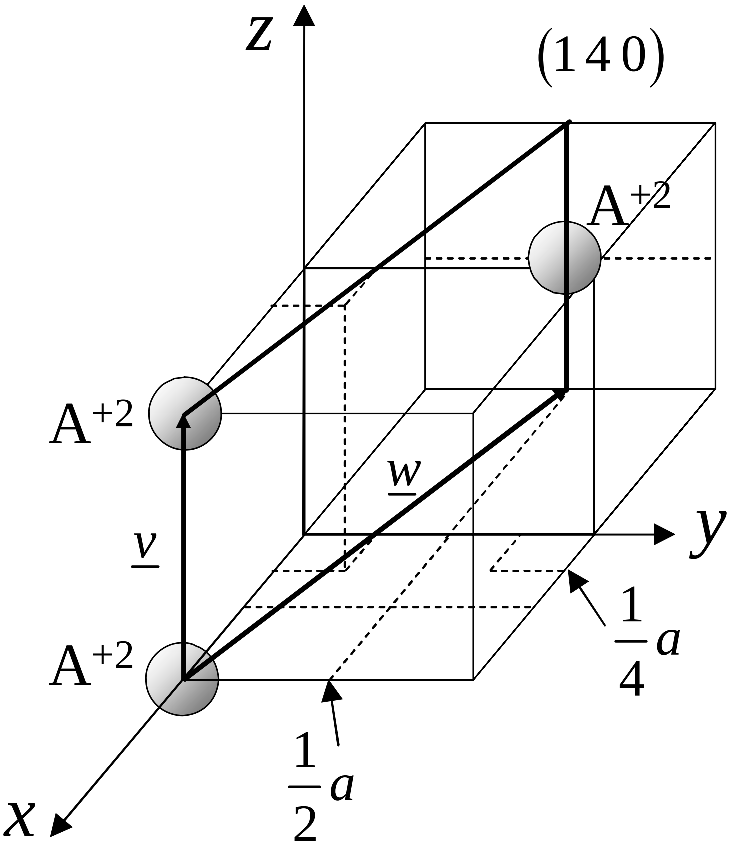
Se conocen los radios iónicos del ión A^{+2}, $r_A = 9.9 \times 10^{-11}$ m, y del ión B^-, $r_B = 1.36 \times 10^{-10}$ m.

- $1.647 \cdot 10^{18}$ cationes/m^2 y $3.294 \cdot 10^{18}$ aniones/m^2
- $8.235 \cdot 10^{17}$ cationes/m^2 y 0 aniones/m^2
- 0 cationes/m^2 y $1.647 \cdot 10^{18}$ aniones/m^2
- $1.647 \cdot 10^{18}$ cationes/m^2 y 0 aniones/m^2
- 0 cationes/m^2 y $3.294 \cdot 10^{18}$ aniones/m^2
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:...

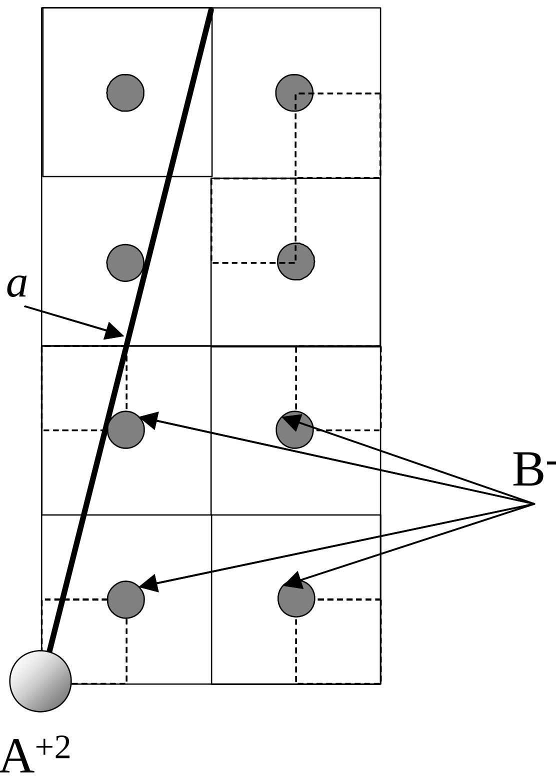
Sol.: en la estructura de la fluorita los cationes A^{+2} se sitúan en los vértices y en los centros de las caras de la celda unitaria, mientras que los aniones B^- ocupan todas las posiciones tetraédricas disponibles. El plano (1 4 0) pasa por los puntos de coordenadas (1, 0, 0), (1,0,1), (-1, 1/2, 0) y (-1, 1/2, 1) y contiene los centros de los cationes A^{+2} señalados en la figura derecha, en la que se han dibujado 2 celdas unitarias y una porción del plano. El plano no contiene ningún anión B^-. En la figura de más abajo se muestra la proyección del plano (1 4 0) sobre el plano $z = 0$.

$$\sqrt{3}a = 4\left(r_{A^{+2}} + r_{B^{-}}\right)$$





proyección sobre plano
$z = 0$



El parámetro de red a se calcula teniendo en cuenta que cada anión está en el hueco tetraédrico formado por 4 cationes, es decir:

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(r_A + r_B\right) \qquad a = 5.427 \times 10^{-10} \ \ \mathrm{m}$$

El área del rectángulo seleccionado se puede calcular mediante un producto vectorial, por ejemplo el producto vectorial de los vectores v y w señalados en la figura:

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ 0 & 0 & a \\ \frac{a}{2} & 2a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{área} = \left|\underline{v} \times \underline{w}\right| = \sqrt{\frac{a^4}{4} + 4a^4}$$

$$\text{área} = \sqrt{17} \cdot \frac{a^2}{2} \qquad \text{área} = 6.072 \times 10^{-19} \text{m}^2$$

El rectángulo contiene en promedio $n_{cationes} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4}$ **cationes y la densidad iónica superficial para los cationes de la estructura es:**

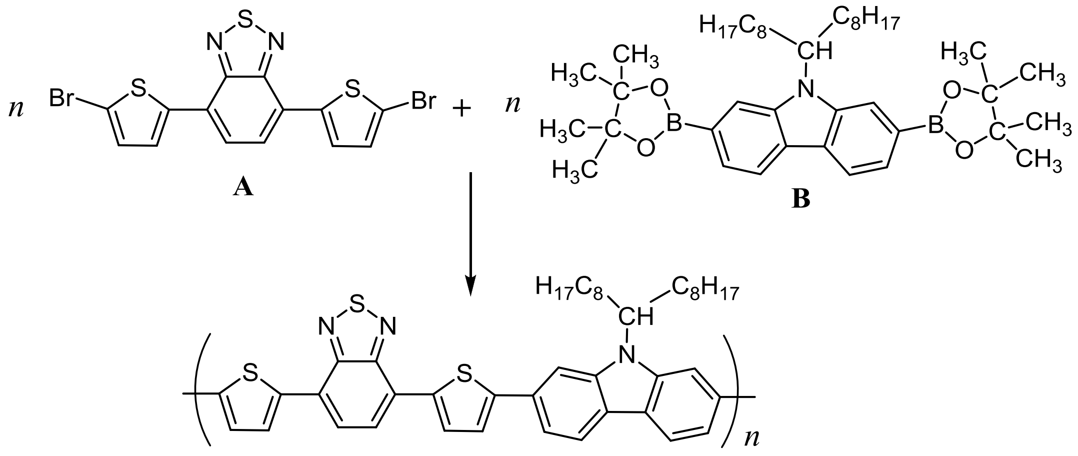
$$\frac{n_{cationes}}{\text{área}} = 1.647 \times 10^{18} \qquad \text{cationes/m}^2$$

y la densidad aniónica superficial es 0 aniones/m^2.

Problema 1

Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

El **PCDTBT** es uno de los polímeros semiconductores más prometedores en el campo de los materiales fotovoltaicos orgánicos, siendo capaz de convertir la luz solar en electricidad con una eficacia del 7.2%. La síntesis del **PCDTBT** se lleva a cabo a partir de los monómeros (**A**) y (**B**) según el esquema sintético siguiente:



El **PCDTBT** es un material cristalino cuya celda unitaria convencional queda descrita por los siguientes parámetros:

$a = 4.19 \times 10^{-9}\ m$ $\quad$ $b = 4.40 \times 10^{-10}\ m$ $\quad$ $c = 3.047 \times 10^{-9}\ m$

$\alpha = \gamma = 90°$ $\quad$ $\beta = 141.66°$

- **a.** Determinar el volumen de la celda unitaria convencional (en m^3)
- **b.** Si la densidad del **PCDTBT** es 1336 kg/m^3, ¿cuántas UERs (unidades estructurales repetitivas) están contenidas en la celda anterior?
- **c.** Para una aplicación en células solares, el **PCDTBT** se mezcla con un derivado de fullereno (**PCBM**) en proporción 1:4 en masa y la mezcla se disuelve en un disolvente orgánico. A partir de la disolución anterior y tras evaporación del disolvente, se deposita una película de 75 nm de espesor sobre la superficie del electrodo (un cuadrado de 1.5 cm de lado). Calcular la masa (en kg) de **PCDTBT** necesaria para formar la película.
- **d.** Si el precio de los monómeros **A** y **B** es conocido, calcular el precio de 100 mg de **PCDTBT**.

Datos: $\rho_{PCBM} = 1500\ kg/m^3$ $\quad$ $P_A = 2.89 \times 10^5$ €$/kg$ $\quad$ $P_B = 1.60 \times 10^5$ €$/kg$

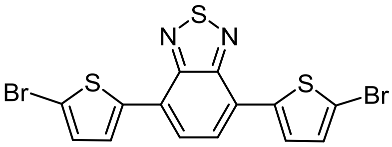
Masas atómicas (en *kg/kmol*): $Mw_C = 12$ $\quad$ $Mw_H = 1$ $\quad$ $Mw_S = 32$ $\quad$ $Mw_N = 14$

$Mw_B = 10.8$ $\quad$ $Mw_O = 16$ $\quad$ $Mw_{Br} = 80$

(3 puntos, 45 minutos)

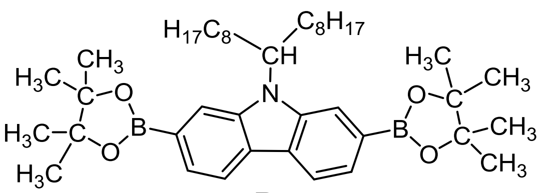
Solución:

Calculamos en primer lugar las masas moleculares de las especies implicadas:



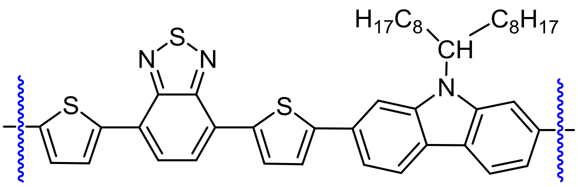
A

$C_{14}H_6Br_2N_2S_3$ $\quad Mw_A = 458\ kg/kmol$



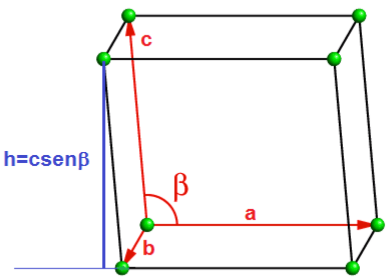
B

$C_{41}H_{65}B_2NO_4$ $\quad Mw_B = 656.6\ kg/kmol$



UER: $C_{43}H_{47}N_3S_3$ $\quad Mw_{UER} = 701\ kg/kmol$

- **El volumen de la celda (ver figura) es $\boldsymbol{V = abcsen\beta = 3.484 \times 10^{-27}\ m^3}$**



- **Como la densidad es**

$\rho_{PCDTBT} = \frac{m}{V} \Rightarrow m = V\rho_{PCDTBT} = 1336 \times 3.484 \times 10^{-27} = 4.655 \times 10^{-24}\ Kg$ es la masa de las UER contenidas en la celda.

Y teniendo en cuenta que la $Mw_{UER} = 701\, kg/kmol \Rightarrow número_{UER} = \frac{4.655\times10^{-24}\ Kg}{701 kg/kmol} \times \frac{6.023\times10^{26}\ UER}{1\ kmol} =$ 4 UER

- **La masa de la película mezcla de PCDTBT/PCBM se puede determinar a partir de su volumen, para lo que es necesario conocer la densidad de la mezcla PCDTBT/PCBM.**

Como la proporción en masa de la mezcla PCDTBT/PCBM es 1:4, las fracciones másicas se calculan de forma inmediata:

$$X_{PCDTBT} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$X_{PCBM} = \frac{4}{5} = 0.8$$

y la densidad de la mezcla será:

$$\frac{1}{\rho_{\text{mezcla}}} = \frac{X_{PCDTBT}}{\rho_{\text{PCDTBT}}} + \frac{X_{PCBM}}{\rho_{\text{PCBM}}} \Rightarrow \frac{1}{\rho_{\text{mezcla}}} = \frac{0.2}{1336} + \frac{0.8}{1500} \Rightarrow$$

$$\rho_{\text{PCDTBT/PCBM}} = \rho_{\text{mezcla}} = 1464.06\ kg/m^3$$

La masa total de la película será:

$$m_{mezcla} = \text{V}\rho_{\text{mezcla}} = 75 \times 10^{-9} \times (1.5 \times 10^{-2})^2 \times 1464.06 = 2.471 \times 10^{-8} kg$$

a partir de la cual se calcula la masa de PCDTBT:

$$m_{PCDTBT} = m_{mezcla} X_{PCDTBT} = 4.941 \times 10^{-9} kg$$

- **Para calcular el precio de 100 mg (10^{-4} kg) del polímero PCDTBT es necesario saber qué cantidades de cada uno de los monómeros se requieren:**

$$m_A = 10^{-4} kg\ PCDTBT \times \frac{1\ kmol\ PCDTBT}{701n\ kg\ PCDTBT} \times \frac{n\ kmol\ A}{1\ kmol\ PCDTBT} \times \frac{458\ kg\ A}{1\ kmol\ A} = 6.533 \times 10^{-5} kg\ A$$

$$m_B = 10^{-4} kg\ PCDTBT \times \frac{1\ kmol\ PCDTBT}{701n\ kg\ PCDTBT} \times \frac{n\ kmol\ B}{1\ kmol\ PCDTBT} \times \frac{656.6\ kg\ B}{1\ kmol\ B} = 9.367 \times 10^{-5} kg\ B$$

siendo el precio pedido

$$P_{100\ mg\ PCDTBT} = P_A + P_B = 6.533 \times 10^{-5} \times 2.89 \times 10^5 + 9.367 \times 10^{-5} \times 1.60 \times 10^5 = 33.87\ €$$

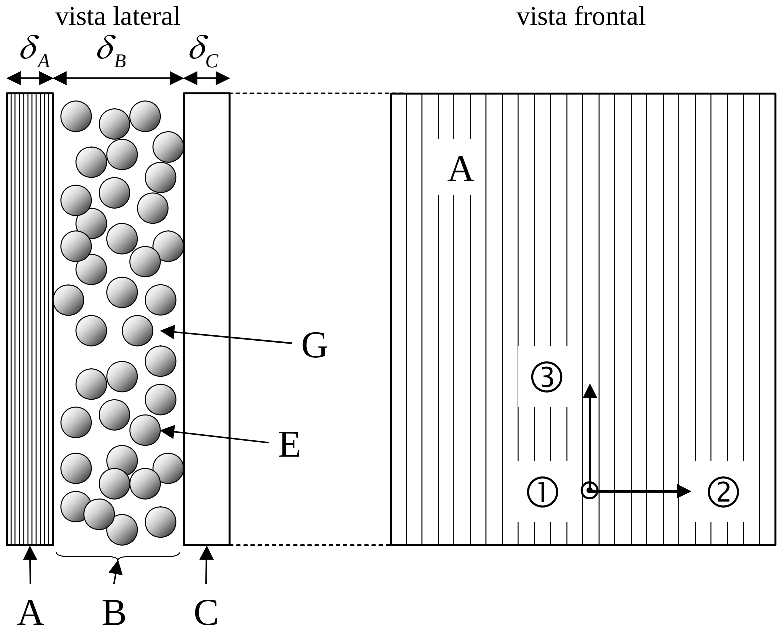
Nombre: **Número de matrícula:**

Problema 2

Un material aislante térmico T es un compuesto tipo sandwich formado por dos láminas exteriores de diferentes materiales, A y C, y un relleno B de esferas cerámicas E en un gas G a baja presión. Las esferas E están colocadas al azar, sin ningún orden especial. La lámina A tiene fibras orientadas unidireccionalmente como indican las líneas verticales de la figura. La conductividad térmica de A en sus ejes convencionales (los de la figura, que no son necesariamente los de T) es:

$$k_A = \begin{pmatrix} 3\times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 3\times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.2\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{W/K m}$$

La lámina C es isótropa y su conductividad térmica es $k_C = 1.2\times 10^{-3}$, la conductividad térmica de E es $k_E = 0.064$ y la de G es $k_G = 9.9\times 10^{-4}$, todas ellas en W/K m. La fracción volumétrica de E en B es $VB_E = 0.12$. Los espesores son $\delta_A = 0.024$, $\delta_B = 0.012$, $\delta_C = 0.082$ m, las densidades son $\rho_A = 1200$, $\rho_C = 920$, $\rho_E = 3400$ kg/m^3 y la del gas es despreciable.



Calcular:

1. la masa de una plancha de 1 m^2 de este material aislante T,
2. la densidad de T (kg/m^3)
3. todas las componentes de la conductividad térmica de T, expresada obligatoriamente en los ejes convencionales de T

nota: cuando al homogeneizar una componente de la conductividad no exista una situación de isoflujo o de isogradiente, usar la regla de Voigt-Reuss-Hill.

(3 puntos, 45 minutos)

Sol.: como A y C son homogéneos pero B no lo es, el primer paso es homogeneizar B. Como las esferas E están colocadas sin ningún orden, y el gas G es isótropo, la capa B también es isótropa. Su densidad (prop. de orden cero) se obtiene directamente de las fracciones volumétricas y de las densidades de E y G (que es despreciable):

$$\rho_B = VB_E \cdot \rho_E + (1 - VB_E) \cdot 0 \qquad \rho_B = 408 \quad \text{kg/m}^3$$

Para obtener la conductividad térmica de B, E y G no están ni en serie ni en paralelo, por lo que se aplica la regla de VRH para obtener su única componente independiente:

$$\text{Voigt} = VB_E \cdot k_E + (1 - VB_E) \cdot k_G \qquad \text{Voigt} = 8.551 \times 10^{-3}$$

$$\text{Reuss} = \left[VB_E \cdot k_E^{-1} + (1 - VB_E) \cdot k_G^{-1} \right]^{-1} \qquad \text{Reuss} = 1.123 \times 10^{-3}$$

con lo que:

$$k_B = \frac{\text{Voigt} + \text{Reuss}}{2} \qquad k_B = 4.837 \times 10^{-3} \quad \text{W/K m}$$

Una vez homogeneizada la capa B, se puede calcular la masa de 1 m² de T: es simplemente la suma de los volúmenes de A, B y C que hay en 1 m² de T, multiplicados por sus correspondientes densidades:

$$\rho_{sup} = 1 \cdot \delta_A \cdot \rho_A + 1 \cdot \delta_B \cdot \rho_B + 1 \cdot \delta_C \cdot \rho_C \qquad \rho_{sup} = 109 \quad \text{kg/m}^2$$

La densidad volumétrica es directamente la masa de 1 m² de T, dividida entre el volumen de 1m² de T:

$$\rho = \frac{\rho_{sup}}{(\delta_A + \delta_B + \delta_C) \cdot 1} \qquad \rho = 925 \quad \text{kg/m}^3$$

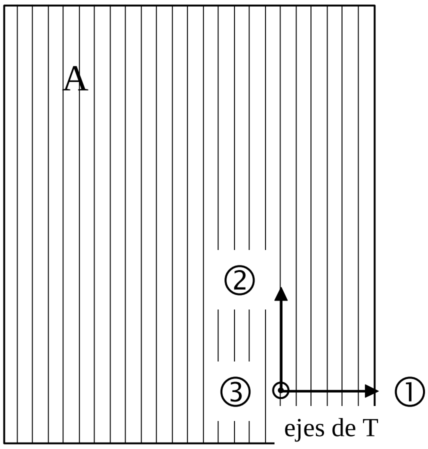
(también puede calcularse como el valor homogeneizado:

$$\frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B + \delta_C} \cdot \rho_A + \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B + \delta_C} \cdot \rho_B + \frac{\delta_C}{\delta_A + \delta_B + \delta_C} \cdot \rho_C = 925 \qquad \text{kg/m}^3$$

donde las fracciones son las fracciones volumétricas de cada componente $V_A = \dfrac{\delta_A}{(\delta_A + \delta_B + \delta_C)}$,

$V_B = \dfrac{\delta_B}{(\delta_A + \delta_B + \delta_C)}$, $V_C = \dfrac{\delta_C}{(\delta_A + \delta_B + \delta_C)}$ **, es decir,** $V_A = 0.203$ **,** $V_B = 0.102$ **,** $V_C = 0.695$ **)**

Debido a la presencia de la fibras de la capa A y a la existencia de la capa C, el compuesto T tiene dos planos de simetría y un eje binario, como se indica en la figura; pertenece a la clase $mm2$.
Por este motivo, el eje convencional 3 debe ser el eje binario. Los ejes 1 y 2 son como se indica en la figura (o intercambiando el 1 y el 2).



Para esta clase, las propiedades de segundo orden simétricas tienen tres componentes independientes en la diagonal, el resto son cero.

En estos ejes convencionales, los valores homogeneizados de k_T son:

<u>Componente 11</u>: A, B y C están en paralelo y sus conductividades se suman linealmente. En la dirección 11 de T <u>en los ejes de T</u>, la componente de k_A que hay que usar en la homogeneización es la 22 <u>en los ejes de A</u> (es decir, en los que están dados los datos) porque el eje 2 de A se corresponde con el eje 1 de T.

$$k_{11} = V_A \cdot k_{A_{2,2}} + V_B \cdot k_B + V_C \cdot k_C \qquad k_{11} = 1.936 \times 10^{-3} \ \text{W/K m}$$

<u>Componente 22</u>: A, B y C están igualmente en paralelo; por motivo análogo al anterior:

$$k_{22} = V_A \cdot k_{A_{3,3}} + V_B \cdot k_B + V_C \cdot k_C \qquad k_{22} = 1.57 \times 10^{-3} \ \text{W/K m}$$

<u>Componente 33</u>: A, B y C están en serie; de las conductividades en serie se suman las inversas. La componente de k_A que hay que usar es la perpendicular al plano de T, la 11 en los ejes de A:

$$k_{33} = \left[V_A \cdot \left(k_{A_{1,1}}\right)^{-1} + V_B \cdot k_B^{-1} + V_C \cdot k_C^{-1}\right]^{-1} \qquad k_{33} = 1.497 \times 10^{-3} \ \text{W/K m}$$