

Nombre:**Número de matrícula:**

- sólo puntuarán las respuestas justificadas con desarrollo numérico, gráfico, etc.
- sólo una respuesta es correcta
- las respuestas incorrectas no restan puntos
- usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador
- usar estas mismas hojas para hacer los cálculos
- 60 min., 0.5 puntos cada problema

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.

1. Una fibra de nylon estirada longitudinalmente se somete a un tensor de esfuerzos en el que las componentes τ_{i3} son todas nulas. ¿Cuál será la nueva longitud de la fibra?

Datos: L_0 es la longitud inicial de la fibra; l = dirección longitudinal; t = dirección transversal

- $L = L_0 \left(1 - \frac{2\nu_{tl}}{E_t} (\tau_1 - \tau_2) \right)$

- $L = L_0 \left(1 - \frac{\nu_{tl}}{E_t} (\tau_1 - \tau_2) + \frac{\tau_3}{E_l} \right)$

- $L = L_0 \left(1 - \frac{\nu_{tl}}{E_t} (\tau_1 - \tau_2) \right)$

- $L = L_0 \left(1 - \frac{\nu_{tl}}{E_t} (\tau_1 + \tau_2) \right)$

- $L = L_0 \left(1 - \frac{\nu_{tl}}{E_l} (\tau_1 + \tau_2) \right)$

- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol: Una fibra de nylon orientada longitudinalmente pertenece a la clase ∞ / mm . Aplicando:

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{s}}} : \underline{\underline{\underline{\tau}}}$$

y teniendo en cuenta que las componentes del tensor de esfuerzos en este caso son:

$$\underline{\underline{\underline{\tau}}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que las componentes τ_{i3} son todas nulas, procediendo igual que

en el problema 09_02_03, la nueva longitud de la fibra será

$$L = L_0(1 + \varepsilon_{33}) \quad \text{siendo} \quad \varepsilon_3 = s_{13}\tau_1 + s_{13}\tau_2 = -\frac{\nu_{tl}}{E_t}\tau_1 - \frac{\nu_{tl}}{E_t}\tau_2 \quad \text{por lo que}$$

$$L = L_0 \left(1 - \frac{\nu_{tl}}{E_t} (\tau_1 + \tau_2) \right)$$

2. Un material compuesto está formado por láminas paralelas de tres tipos de materiales A, B y C. Cada una de las láminas, por separado, se considera un material isótropo y homogéneo. Se desea que el módulo de Young del material compuesto en la dirección perpendicular al plano de las láminas sea 10 veces mayor que el módulo de A siendo el volumen de B la cuarta parte del volumen de A. Determina la relación entre los espesores de los materiales C y B (δ_C/δ_B) en el material compuesto. Datos: $E_A = 2.5$ GPa; $E_B = 80$ GPa; $E_C = 250$ GPa.

- 29.61
- 39.25
- 49.34
- 65.42
- 15.96
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol: el material compuesto pertenece a la clase ∞/mm y la dirección perpendicular al plano de las láminas es la dirección 3, correspondiendo la tracción a condiciones de isoesfuerzo. Aplicando la regla

de mezcla de Reuss: $\frac{1}{E_{comp}} = \frac{V_A}{E_A} + \frac{V_B}{E_B} + \frac{V_C}{E_C}$ y teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

$$E_{compuesto} = E_c = 10E_A$$

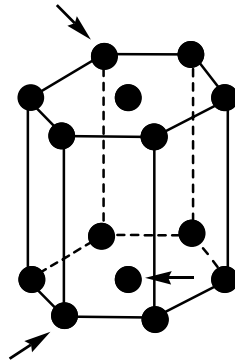
$$V_B = \frac{V_A}{4}$$

se trata de resolver la ecuación siguiente: $\frac{1}{10E_A} = \frac{4V_B}{E_A} + \frac{V_B}{E_B} + \frac{V_C}{E_C} = \frac{4V_B}{E_A} + \frac{V_B}{E_B} + \frac{1-5V_B}{E_C}$

obteniéndose los siguientes valores: $V_B = 2.26 \times 10^{-2}$ y puesto que la relación de fracciones

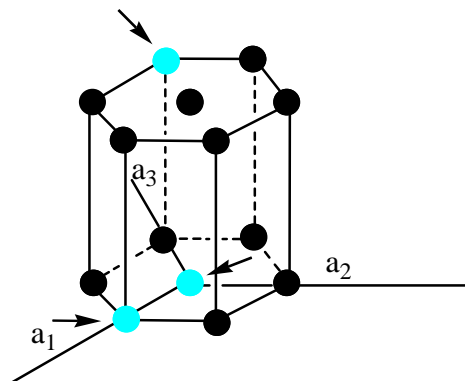
volumétricas es idéntica a la relación de espesores $\frac{\delta_C}{\delta_B} = 39.25$

3. Determinar los índices de Miller-Bravais del plano cristalográfico que contiene los átomos marcados con flechas en la estructura hexagonal de la figura:



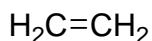
- (1101)
- $(01\bar{1}1)$
- $(10\bar{1}1)$
- $(\bar{1}101)$
- $(101\bar{1})$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol: las intersecciones con los ejes cristalográficos son en el infinito, 1, -1 y 1, por lo que los índices del plano son $(01\bar{1}1)$

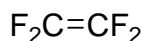


4. ETFE es la sigla que denomina al copolímero de etileno-tetrafluoroetileno, un material plástico emparentado con el teflón, muy duradero, adaptable y que puede ser transparente. Determina la masa (kg) de un kmol de este copolímero que contiene un 40% en peso de etileno:.
- 72.20 kg/kmol
 - 60.40 kg/kmol
 - 56.80 kg/kmol
 - 78.40 kg/kmol
 - 74.80 kg/kmol
 - ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol: el copolímero está formado por los dos monómeros siguientes: etileno (A) y tetrafluoroetileno (B), siendo sus fórmulas químicas y masas moleculares las siguientes:



$$Mw = 28 \text{ kg/kmol}$$



$$Mw = 100 \text{ kg/kmol}$$

Como la totalidad de átomos de los monómeros se incorporan en la cadena polimérica, la masa molecular del copolímero (masa de un kmol) se calcula a partir de las masas moleculares anteriores y de las fracciones molares de los monómeros:

$$Mw_{\text{copolímero}} = x_A Mw_A + x_B Mw_B$$

Tomando como base de cálculo 100kg de copolímero, se transforma la fracción másica (X_A) en fracción molar (x_A):

$$x_A = \frac{\text{moles A}}{\text{moles A} + \text{moles B}} = \frac{\frac{X_A}{Mw_A}}{\frac{X_A}{Mw_A} + \frac{X_B}{Mw_B}} = \frac{\frac{40}{28}}{\frac{40}{28} + \frac{60}{100}} = 0.704$$

y por tanto la masa molecular solicitada es $Mw = 0.704 \times 28 + (1 - 0.704) \times 100 = 49.31 \text{ kg / kmol}$

5. De un material isótropo de módulo de Young E , relación de Poisson ν positiva y coeficiente de dilatación térmica α se corta un cubo de lado L . El cubo se comprime hidrostáticamente por aplicación del tensor presión hidrostática:

$$\left(\underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{\delta}} \right)$$

¿Qué variación de temperatura (ΔT) deberá experimentar el cubo para recuperar su volumen original?

- $\Delta T = \frac{p(1-2\nu)}{E\alpha}$

- $\Delta T = \frac{p(1+2\nu)}{E\alpha}$

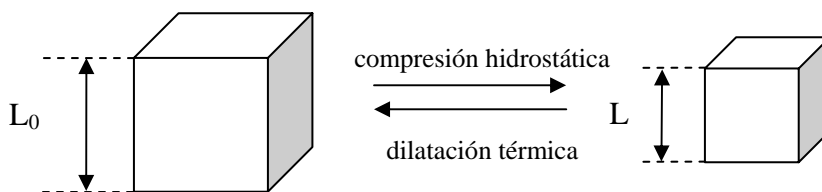
- $\Delta T = \frac{p(1+2\nu)}{3E\alpha}$

- $\Delta T = \frac{p(1-2\nu)}{3E\alpha}$

- $\Delta T = \frac{3p(1-2\nu)}{E\alpha}$

- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol: El cubo de volumen inicial V_0 se comprime hasta un volumen V por la acción de la presión hidrostática, para después dilatarse hasta recuperar el volumen original:



- Para un material isótropo sometido a la acción del tensor presión hidrostática ($\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\tau}}$, ver 02_01_02, diapositiva 27), la longitud del lado del cubo pasa de L_0 a L , siendo

$$L = L_0 \left(1 + \varepsilon_{11(\text{presión})} \right) \text{ siendo } \varepsilon_{11(\text{presión})} = -\frac{P}{E}(1-2\nu)$$

- Cuando el cubo de lado L se dilata debido al incremento de temperatura ΔT ($\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}} \Delta T$) recupera su longitud inicial L_0 : $L_0 = L \left(1 + \varepsilon_{11(\text{dil. térmica})} \right)$ siendo $\varepsilon_{11(\text{dil. térmica})} = \alpha_{11} \Delta T$

Combinando ambas expresiones:

$$L_0 = L \left(1 + \varepsilon_{11(\text{dil. térmica})} \right) = L_0 \left(1 + \varepsilon_{11(\text{presión})} \right) \left(1 + \varepsilon_{11(\text{dil. térmica})} \right) = L_0 \left(1 + \varepsilon_{11(\text{presión})} + \varepsilon_{11(\text{dil. térmica})} \right)$$

$$1 = 1 + \varepsilon_{11(\text{presión})} + \varepsilon_{11(\text{dil. térmica})} \Rightarrow \varepsilon_{11(\text{dil. térmica})} = -\varepsilon_{11(\text{presión})} \Rightarrow \alpha_{11} \Delta T = \frac{P}{E}(1-2\nu) \Rightarrow \Delta T = \frac{P(1-2\nu)}{E\alpha}$$

6. La conductividad de una oblea de silicio se aumenta mediante dopaje con átomos de fósforo. Para ello, el fósforo se difunde en la oblea de silicio, a una temperatura de 1100°C de modo que la resistividad eléctrica medida a una profundidad de $4 \times 10^{-6} \text{ m}$ y a una temperatura de 27°C sea $0.055 \Omega \text{ m}$. Suponiendo que inicialmente la oblea de silicio no contiene ninguna impureza y que la concentración de átomos de fósforo en la superficie es $10^{23} \text{ átomos/m}^3$, determina el tiempo necesario para efectuar el dopaje.

Datos: $D_{1100^\circ\text{C}} = 3 \times 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{s}$; $\mu_n(300\text{K}) = 0.135 \text{ m}^2/(\text{Vs})$; $\mu_p(300\text{K}) = 0.048 \text{ m}^2/(\text{Vs})$

Considerar la oblea de silicio como un medio semiinfinito.

- $4.785 \times 10^4 \text{ s}$
- $6.705 \times 10^4 \text{ s}$
- $3.543 \times 10^4 \text{ s}$
- $4.176 \times 10^4 \text{ s}$
- $3.823 \times 10^4 \text{ s}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol: se trata de un problema de difusión donde para determinar el tiempo (t), es necesario conocer previamente C_x

$$\frac{C_s - C_x}{C_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Al dopar la oblea de silicio con átomos de P, se obtiene un semiconductor extrínseco tipo n, cuya conductividad (resistividad) vendrá determinada fundamentalmente por la concentración de impurezas:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q\mu_n n_n} \Rightarrow n_n = \frac{1}{\rho q \mu_n} = N_d = C_x$$

De esta forma y a partir del dato de resistividad se obtiene el valor de C_x :

$$n_n = \frac{1}{\rho q \mu_n} = N_d = C_x = 8.418 \times 10^{20} \text{ átomos/m}^3$$

Sustituyendo en la expresión de la 2ª ley de Fick, se despeja $t = 3.823 \times 10^4 \text{ s}$

7. Para determinar la conductividad térmica de un monocristal se aplica el siguiente gradiente de temperatura, cuyas componentes en las direcciones convencionales 1 y 2 tienen el mismo valor numérico y la componente en la dirección 3 es cero.

$$\underline{\nabla T} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$$

En estas condiciones se mide un flujo de calor que presenta tres componentes distintas, ninguna de las cuales es nula. ¿A cuál de las siguientes clases cristalográficas puede pertenecer el monocristal?

- $mm2$
- $2/m$
- $\bar{4}2m$
- 6
- 32
- $\bar{4}3m$

Sol: aplicando la ley de Fourier $\underline{q} = -\underline{k} \cdot \underline{\nabla T}$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{las componentes del flujo de calor son: } \begin{aligned} q_1 &= -k_{11}C - k_{12}C \\ q_2 &= -k_{12}C - k_{22}C \text{ siendo} \\ q_3 &= -k_{13}C - k_{23}C \end{aligned}$$

$$q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq 0$$

Teniendo en cuenta la estructura del tensor conductividad térmica (ver 02_01_02, propiedades de 2° orden) sólo son posibles dos sistemas cristalográficos: monoclinico y triclinico. Luego el monocristal pertenece a la clase $2/m$.

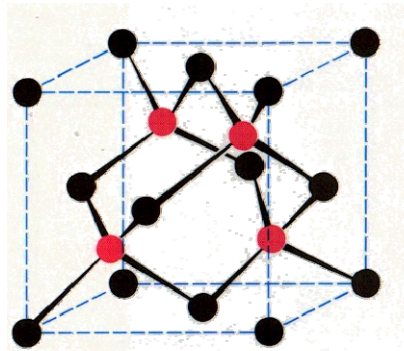
8. Calcular el factor de empaquetamiento atómico de un material con la misma estructura cristalina que el diamante, y que está formado por átomos cuyo radio es 2.5 veces el radio del átomo de carbono.
- 0.37
 - 0.34
 - 0.42
 - 0.52
 - 0.68
 - ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol: teniendo en cuenta la estructura cristalina del diamante (pág.454, fig 13.15, 3ª Ed. Smith) y la definición de factor de empaquetamiento atómico:

$$APF = \frac{\text{Volumen}_{\text{átomos}}}{\text{Volumen}_{\text{celda}}}$$

El número total de átomos en la celda es:

$$n_{\text{átomos}} = \underbrace{8 \times \frac{1}{8}}_{\text{vértices}} + \underbrace{6 \times \frac{1}{2}}_{\text{centros caras}} + \underbrace{4}_{\text{posiciones tetraédricas}} = 8$$



Puesto que la relación entre la arista de la celda cúbica y el radio del átomo es $a = \frac{8R}{\sqrt{3}}$ se obtiene un

$$APF = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi R^3}{a^3} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi R^3}{\left(\frac{8R}{\sqrt{3}}\right)^3} = 0.34$$



Nombre:

Número de matrícula:

Problema 1

La estructura de un óxido cerámico AO_2 es similar a la estructura tetragonal del rutilo.

En la figura que se muestra a la izquierda, se representan los iones A^{+4} en los vértices y en el centro de la celda (coordinación 6); los iones oxígeno (coordinación 3) son las esferas de mayor tamaño y se encuentran: dos en el plano $z=0$, otros dos en el plano $z=1$, y los dos últimos en el plano $z=0.5$. Sólo los oxígenos de los planos $z=0$ y $z=1$ son tangentes ("tocan") al catión central; los oxígenos del plano $z=0.5$ no "tocan" al catión central (figura derecha, abajo).

En la figura de la izquierda se indican los parámetros "a" y "c" de la celda tetragonal.

Se conocen las posiciones iónicas para los oxígenos: $\pm(0.3, 0.3, 0)$ y $\pm(0.8, 0.2, 0.5)$ tal y como se indican en las figuras,

y también se conoce el parámetro de celda $a := 4.5937 \cdot 10^{-10}$ m.

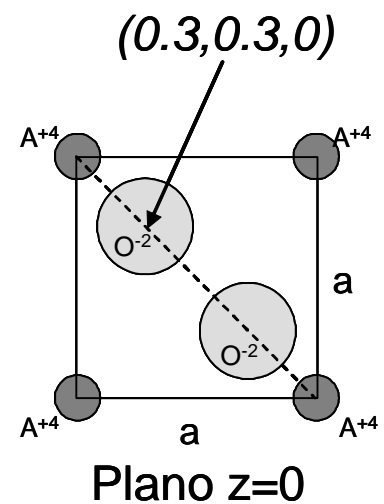
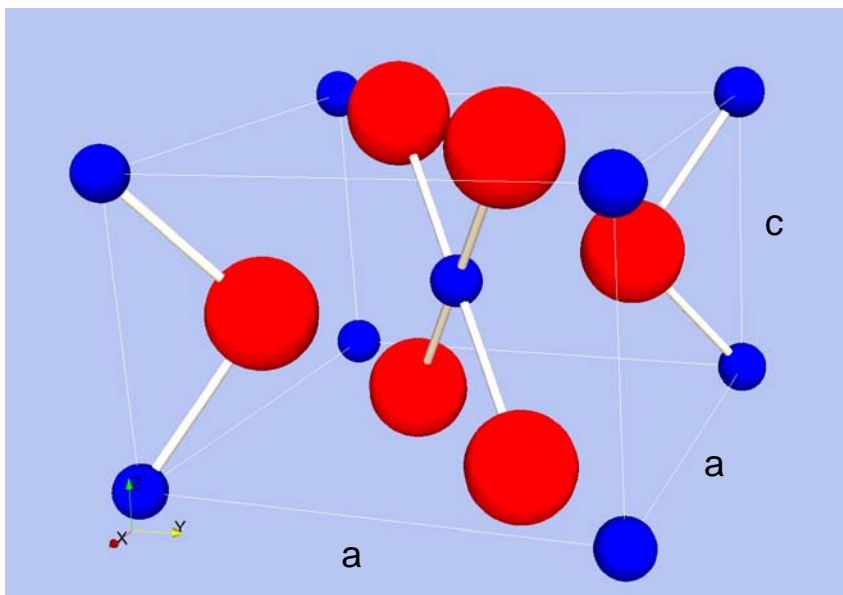
Calcular el factor de empaquetamiento iónico y la densidad del óxido cerámico AO_2 .

Datos: radio del catión $r_A = 6.4 \cdot 10^{-11}$ m

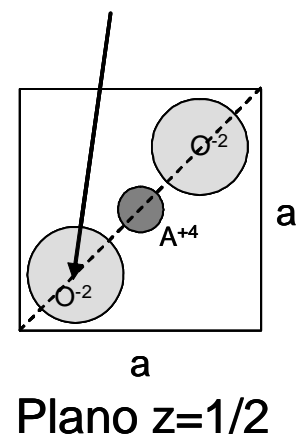
radio del anión $r_{O^{2-}} = 1.32 \cdot 10^{-10}$ m

masa atómica del catión $M_{wA} = 47.9$ kg/kmol

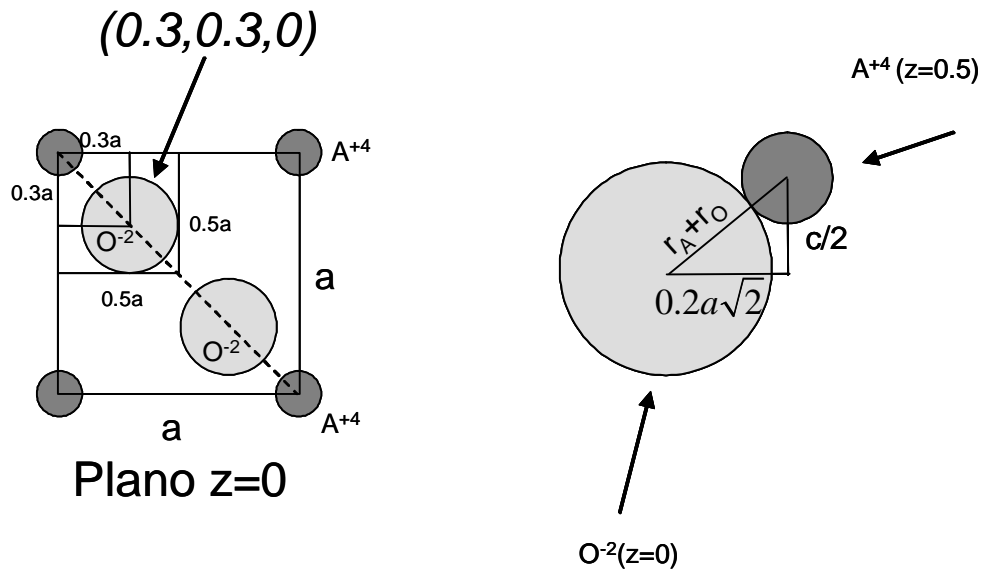
(3 puntos, 45 minutos)



$(0.8, 0.2, 0.5)$



Sol: Los parámetros de la estructura tetragonal son a y c . El parámetro c se determina, por ejemplo, a partir de las posiciones de los iones oxígeno en el plano $z=0$, que son tangentes al catión central (plano $z=0.5$) :



Con los datos del problema calculamos c :

$$(r_A + r_O)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (0.2a\sqrt{2})^2$$

$$c := 2 \cdot \sqrt{(r_A + r_O)^2 - 2(0.2a)^2}$$

$$c = 2.935 \times 10^{-10} \quad \text{m}$$

El mismo cálculo se puede realizar con los oxígenos del plano $z=0.5$, que serán tangentes a cationes situados en los vértices del plano $z=0$ o $z=1$.

El número de iones por celda es: $(8/8+1)= 2$ iones A^{+4} y $(4/2+2)=4$ iones O^{-2} . El factor de empaquetamiento iónico se calcula :

$$\text{Vol} := a^2 \cdot c$$

$$\text{APF} := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(4 \cdot r_{O^2}^3 + 2 \cdot r_{A^4}^3)}{\text{Vol}} \cdot 100$$

$$\text{APF} = 65.769 \quad \%$$

Para la densidad, conocemos el volumen de la celda y sólo falta calcular la masa de una celda, con 2 iones A^{+4} y 4 iones O^{-2} .

$$M_{wO} := 16 \quad \text{kg/kmol}$$

$$\rho := \frac{2 \cdot MwA + 4 \cdot MwO}{Vol \cdot 6.023 \cdot 10^{26}}$$

$$\rho = 4284 \text{ kg/m}^3$$

**Problema 2****Nombre:****Número de matrícula:**

Se desea fabricar un material compuesto para aislamiento térmico de viviendas. El material compuesto está formado por capas de tres materiales diferentes, un metal M (para dar rigidez mecánica), una espuma E de poliuretano (para aislar térmicamente), y un polímero P (como barrera a la humedad). Los tres componentes, cada uno por separado, son homogéneos e isotrópicos.

Del material compuesto se exige que cumpla las siguientes especificaciones:

- su precio P_C por unidad de volumen, en €/m³, debe ser $S_1 = 2800$ €/m³.
- su módulo elástico en isodeformación E_c debe ser $S_2 = 900$ MPa.

Las propiedades de los tres componentes son las siguientes:

- precios (en €/m³): $P_M = 9600$, $P_E = 3900$, $P_P = 1800$
- módulos elásticos (en MPa): $E_M = 1600$, $E_E = 1900$, $E_P = 270$
- densidades (en kg/m³): $\rho_M = 2100$, $\rho_E = 290$, $\rho_P = 1200$

Determinar

1. la composición volumétrica del compuesto C (en fracciones volumétricas de M, E y P)
2. la densidad del compuesto C (en kg/m³)
3. el precio del compuesto en €/kg.

(3 puntos, 45 minutos)



Sol.: las fracciones volumétricas son V_i . La primera especificación implica:

$$S_1 = V_M \cdot P_M + V_E \cdot P_E + (1 - V_M - V_E) \cdot P_P$$

La segunda especificación implica:

$$S_2 = V_M \cdot E_M + V_E \cdot E_E + (1 - V_M - V_E) \cdot E_P$$



La composición volumétrica que cumple ambas condiciones es la solución de estas dos ecuaciones:

$$V_M = 0.031 \quad V_E = 0.361 \quad V_P := 1 - V_M - V_E \quad V_P = 0.608$$

La densidad del compuesto es:

$$P_C := V_M \cdot \rho_M + V_E \cdot \rho_E + (1 - V_M - V_E) \cdot \rho_P \quad P_C = 899 \text{ kg/m}^3$$

Y el precio por unidad de masa es:

$$\frac{S_1}{P_C} = 3.11 \text{ €/kg}$$

El problema puede hacerse igualmente usando el diagrama ternario. Las dos especificaciones son dos rectas sobre el diagrama ternario. El modo más fácil de trazarlas es ver dónde cortan a los lados del triángulo en que $V_E=0$ y $V_M=0$. Estos puntos de corte (A y B para la recta de la primera especificación; X y Z para la recta de la segunda especificación) se obtienen de despejar V_M y V_E de la primera y de la segunda especificación respectivamente:

Extremos de la primera especificación (A y B):

$$V_{EA} := 0$$

$$V_{MB} := 0$$

$$V_{MA} := \frac{V_{EA} \cdot P_E + P_P - P_P \cdot V_{EA} - S_1}{P_P - P_M}$$

$$V_{EB} := \frac{V_{MB} \cdot P_M + P_P - P_P \cdot V_{MB} - S_1}{P_P - P_E}$$

$$V_{PA} := 1 - V_{MA}$$

$$V_{PB} := 1 - V_{EB}$$

$$V_{MA} = 0.128$$

$$V_{MB} = 0$$

$$V_{EA} = 0$$

$$V_{EB} = 0.476$$

$$V_{PA} = 0.872$$

$$V_{PB} = 0.524$$

Extremos de la segunda especificación (X y Z):

$$V_{EX} := 0$$

$$V_{MX} := \frac{V_{EX} \cdot E_E + E_P - E_P \cdot V_{EX} - S_2}{E_P - E_M}$$

$$V_{PX} := 1 - V_{MX}$$

$$V_{MX} = 0.474$$

$$V_{EX} = 0$$

$$V_{PX} = 0.526$$

$$V_{MZ} := 0$$

$$V_{EZ} := \frac{V_{MZ} \cdot E_M + E_P - E_P \cdot V_{MZ} - S_2}{E_P - E_E}$$

$$V_{PZ} := 1 - V_{EZ}$$

$$V_{MZ} = 0$$

$$V_{EZ} = 0.387$$

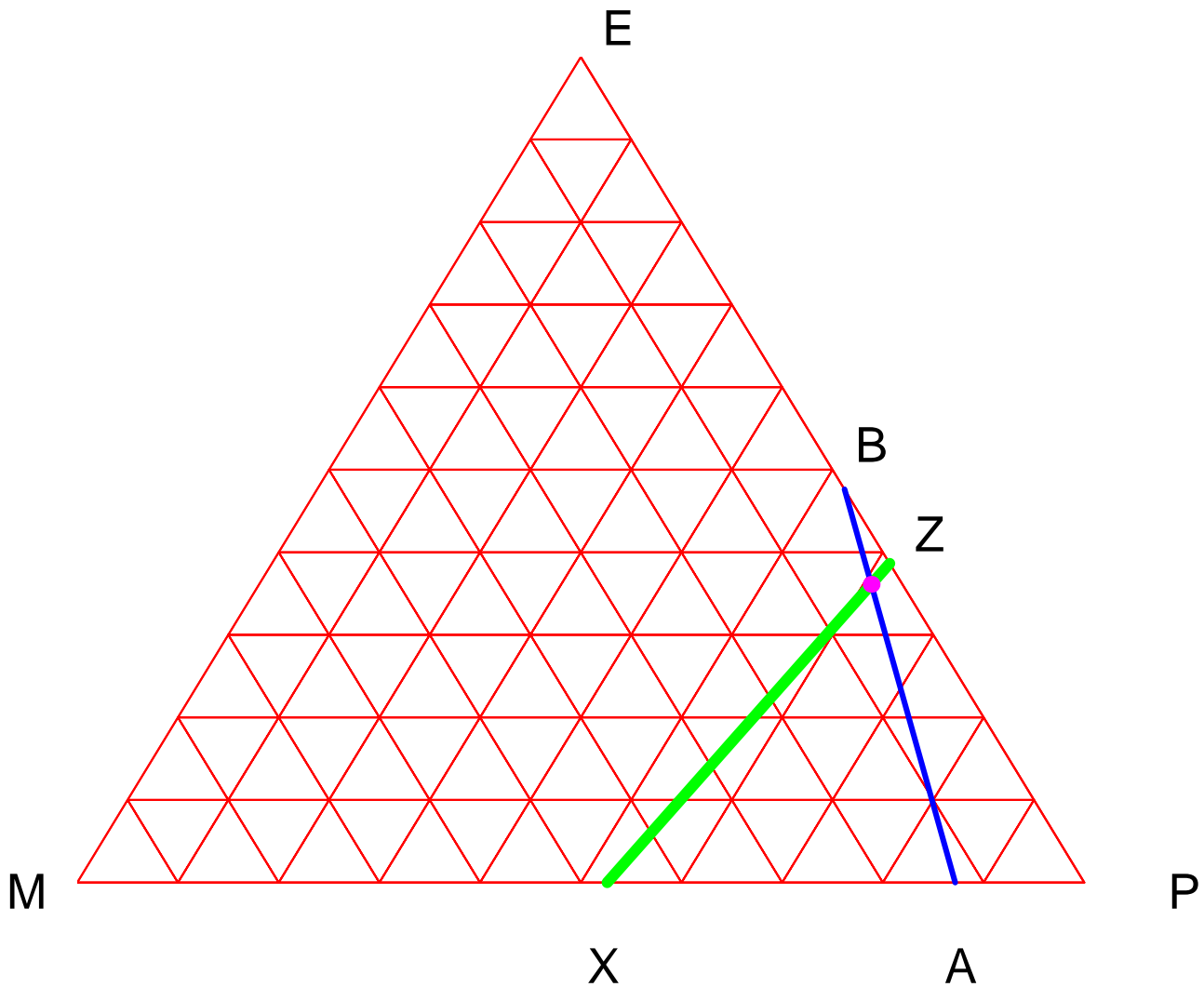
$$V_{PZ} = 0.613$$

El punto de corte de estas dos rectas es la solución buscada:

☐ _____

☐ _____

☐ _____



La solución se lee directamente del diagrama

$$V_M = 0.031$$

$$V_E = 0.361$$

$$V_P := 1 - V_M - V_E$$

$$V_P = 0.608$$

