

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:

- sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.
- sólo se calificarán los problemas en los que se haya marcado una respuesta. Si la opción elegida es "ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:", la respuesta debe aparecer sobre la línea de puntos inmediatamente a continuación.
- las respuestas incorrectas no restan puntos
- usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador
- usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, no usar ningún otro papel
- 80 min, 0.5 puntos cada problema

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.

Las prectas se publicarán no más tarde del día 25 de junio y la revisión de examen será el 28 de junio a las 10:00 en la sala R1.

1. Un material está compuesto de dos materiales isótropos diferentes, A y B. El primero está en mayor cantidad (volumétrica: $V_A > V_B$). La relación entre los módulos de Young de los dos $r_{AB} = E_A/E_B$ es $r_{AB} = 4.4$ y la relación entre los módulos del compuesto en isodeformación y en isotensión

$R_{AB} = (E_c)_{isodef} / (E_c)_{isotens}$ es $R_{AB} = 1.2$. Determinar la fracción volumétrica de A en el compuesto.

- 0.917
- 0.776
- 0.954
- 0.843
- 0.681
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

Sol.: los módulos en isodeformación y en isotensión son:

$$(E_c)_{isodef} = V_A E_A + (1 - V_A) E_B$$
$$(E_c)_{isotens}^{-1} = V_A \frac{1}{E_A} + (1 - V_A) \frac{1}{E_B}$$

multiplicando las dos expresiones se obtiene:

$$\frac{(E_c)_{isodef}}{(E_c)_{isotens}} = [V_A E_A + (1 - V_A) E_B] \left[V_A \frac{1}{E_A} + (1 - V_A) \frac{1}{E_B} \right]$$

Desarrollando el producto se obtiene una ecuación cuadrática para V_A :

$$V_A^2 - V_A + \frac{R_{AB} - 1}{r_{AB} + \frac{1}{r_{AB}} - 2} = 0$$

cuya solución, compatible con $V_A > V_B$, es:

$$V_A = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{R_{AB} - 1}{r_{AB} + \frac{1}{r_{AB}} - 2}}}{2}$$

$V_A = 0.917$

2. Un material cerámico tiene fórmula estequiométrica AB_2 y su estructura es tipo fluorita. Del número total de aniones B^- que hay en su celda cristalina se sustituyen, en promedio, $n = 0.41$ aniones por aniones C^- . Determinar la fracción molar de AB_2 en la solución sólida de AB_2 y AC_2 resultante.

- 0.895
- 0.725
- 0.949
- 0.60
- 0.86
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

Sol.: como la estructura de AB_2 es tipo fluorita, la celda cristalina contiene 8 aniones B^- en los ocho huecos tetraédricos que definen los 4 cationes A^{+2} . Si de los 8 aniones B^- se sustituyen n , la celda contiene en total 4 cationes A^{+2} , (ninguno de éstos se sustituye) $(8-n)$ iones B^- y n iones C^- , lo que corresponde a tener $A_{(8-n)/2}B_{8-n}C_n$, o lo que es lo mismo, $(AB_2)_{4-n/2}(AC_2)_{n/2}$. La fracción molar de AB_2 en la solución sólida formada es entonces:

$$x_{AB_2} = \frac{4 - \frac{n}{2}}{4 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}}$$

$x_{AB_2} = 0.949$

3. Un material del sistema hexagonal tiene un módulo de Young $E_2 = 4.6 \times 10^{10}$ Pa y un módulo cortante $G_6 = 2.1 \times 10^{10}$ Pa. Determinar su relación de Poisson transversal-transversal ν_{tt} (ν_{12} o ν_{21}).

- 0.095
- 0.432
- 0.214
- 0.384
- 0.221
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

Sol.: para un material de este sistema se cumple $E_1=E_2$ y $\nu_{12}=\nu_{21}$. Por otro lado, los módulos dados son los inversos de s_{11} y de s_{66} respectivamente. Para un material de este sistema y de acuerdo con la estructura de la complianza elástica se cumple:

$$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) \Rightarrow s_{12} = s_{11} - \frac{s_{66}}{2} = \frac{1}{E_1} - \frac{1}{2G_6}$$

La relación de Poisson pedida está relacionada con s_{12} : $s_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$

Despejando ν_{12} de las dos relaciones anteriores: $\nu_{12} = -E_1 s_{12} = -E_1 \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{2G_6} \right) = \frac{E_1}{2G_6} - 1$

$$\nu_{12} = \frac{E_2}{2G_6} - 1 \quad \nu_{12} = 0.095$$

4. Expresar por componentes el tensor, de nombre A, que resulta de la siguiente expresión:

$$\left(\underline{\underline{r}} : \underline{\underline{BB}} \right) \cdot \underline{\underline{C}}$$

- $A_i = r_{ijkl} B_l B_k C_j$
- $A_{ij} = r_{ijkl} B_j B_k C_l$
- $A_{ij} = r_{ijkl} B_k B_l C_i$
- $A_i = r_{iilk} B_l B_k C_k$
- $A_{tk} = r_{iklj} B_j B_l C_k$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

Sol.: realizamos primero la doble contracción del paréntesis, y luego la siguiente contracción:

$$\underline{\underline{r}} : \underline{\underline{BB}} = \underline{\delta_i} \underline{\delta_j} \underline{\delta_k} \underline{\delta_l} : \underline{\delta_m} \underline{\delta_n} r_{ijkl} B_m B_n = \underline{\delta_i} \underline{\delta_j} r_{ijkl} B_l B_k$$

$$\underline{A} = \underline{\delta_i} \underline{\delta_j} r_{ijkl} B_l B_k \cdot \underline{\delta_p} C_p = \underline{\delta_i} r_{ijkl} B_l B_k C_j$$

la componente *i* del tensor de primer orden resultante será:

$$A_i = r_{ijkl} B_l B_k C_j$$

5. Un elemento semiconductor del grupo IV A, a 300 K, tiene $N = 4$ átomos ionizados por cada 10^{13} átomos. La densidad del semiconductor es $\rho = 2.25 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y su masa atómica es $M_w = 31 \text{ kg/kmol}$. Determinar la conductividad eléctrica del semiconductor a dicha temperatura, si se conocen las movilidades de los portadores de carga:

$$\mu_n = 0.115 \text{ m}^2/\text{Vs} \text{ y } \mu_p = 0.045 \text{ m}^2/\text{Vs}.$$

- $7.311 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$
- $2.711 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$
- $1.6 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$
- $2.457 \cdot 10^{-3} \text{ S/m}$
- $4.476 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

Sol.: las concentraciones de portadores de carga negativos y portadores de carga positivos del semiconductor intrínseco son idénticas puesto que los portadores se crean por parejas cada vez que un átomo del semiconductor del grupo IV A se ioniza, es decir:

$$n_i = p_i$$

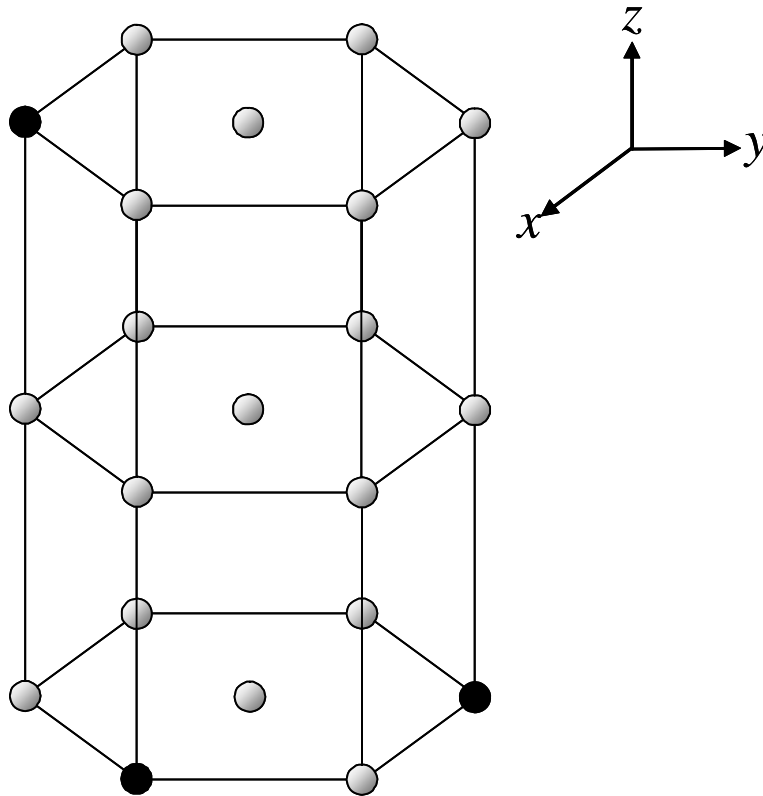
$$n_i = \frac{N}{10^{13}} \cdot 6.023 \cdot 10^{26} \cdot \frac{\rho}{M_w} \text{ portadores/m}^3 \quad n_i = 1.749 \times 10^{16} \text{ portadores/m}^3$$

y la conductividad eléctrica del semiconductor intrínseco se calcula:

$$\sigma_i = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot n_i \cdot (\mu_n + \mu_p) \quad \sigma_i = 4.476 \times 10^{-4} \text{ S/m}$$

6. Determinar los índices de Miller-Bravais (obligatoriamente cuatro índices) del plano que pasa por los

átomos marcados en negro en la estructura hexagonal de la figura. Utilizar los ejes que se dan en la figura y no otros.



- $(\bar{2}112)$
- $(1\bar{2}13)$
- $(11\bar{2}1)$
- $(02\bar{2}1)$
- $(2\bar{2}01)$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

Sol.: colocamos el origen, por ejemplo, en el plano más inferior en el átomo extremo izquierdo, de manera que la intersección del plano con el eje z sea 2. La intersecciones con los ejes serán:

x	y	u	z
2	2	-1	2

Si ahora invertimos resulta:

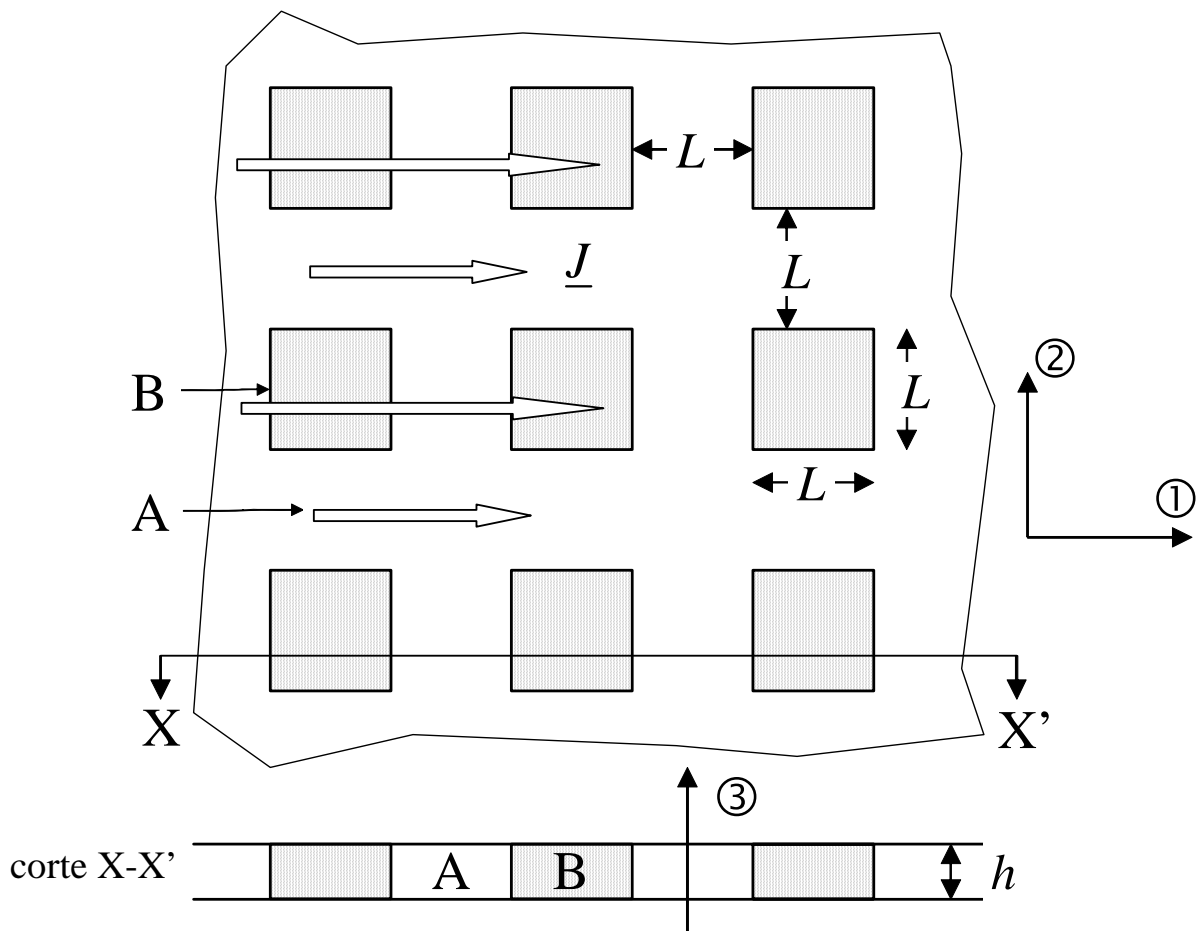
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
---------------	---------------	----	---------------

y multiplicando por 2

$$(11\bar{2}1)$$



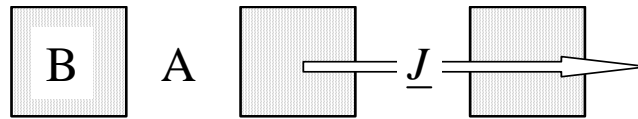
7. La figura representa dos vistas de un material compuesto T en forma de lámina de espesor $h = 1.2 \times 10^{-3}$ m y $L = 0.01$ m. Las resistividades eléctricas de A y B son $\rho_A = 234$ y $\rho_B = 735$ $\Omega.m$. Al aplicar un campo eléctrico en dirección 1, la densidad de corriente eléctrica sólo tiene componente 1, como indican las flechas. Calcular la componente 11 de la resistividad eléctrica del compuesto en función de las resistividades de los componentes y de la geometría.



- 546.14 $\Omega.m$
- 817.80 $\Omega.m$
- 471.90 $\Omega.m$
- 6045 $\Omega.m$
- 315.58 $\Omega.m$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

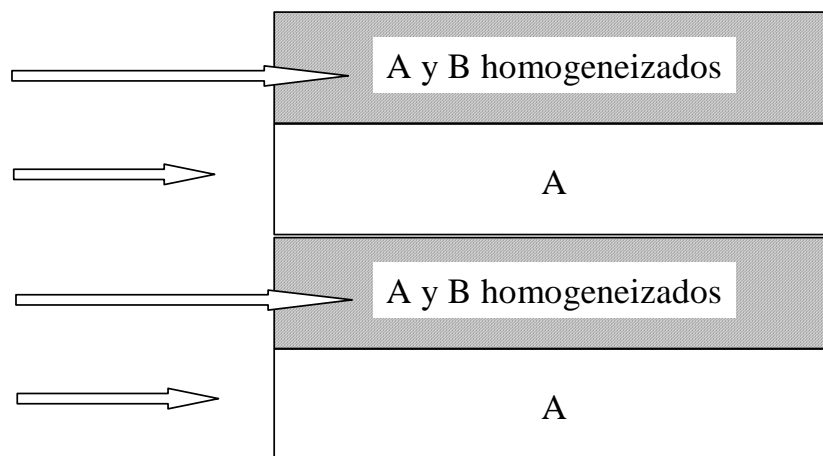
Sol.: de acuerdo con el enunciado, el compuesto T tiene dos "componentes" en paralelo:

1) A y B homogeneizados, eléctricamente en serie en esta región del compuesto, con su correspondiente resistividad eléctrica calculada en condiciones de isoflujo:



y 2) A, cuya resistividad es conocida.

Al aplicar un campo eléctrico en dirección 1, el flujo de carga eléctrica o densidad de corriente eléctrica en dirección 1 que atraviesa la región de A y B homogeneizados (ver figura), es diferente del flujo de carga eléctrica que atraviesa la región en la que sólo hay componente A:



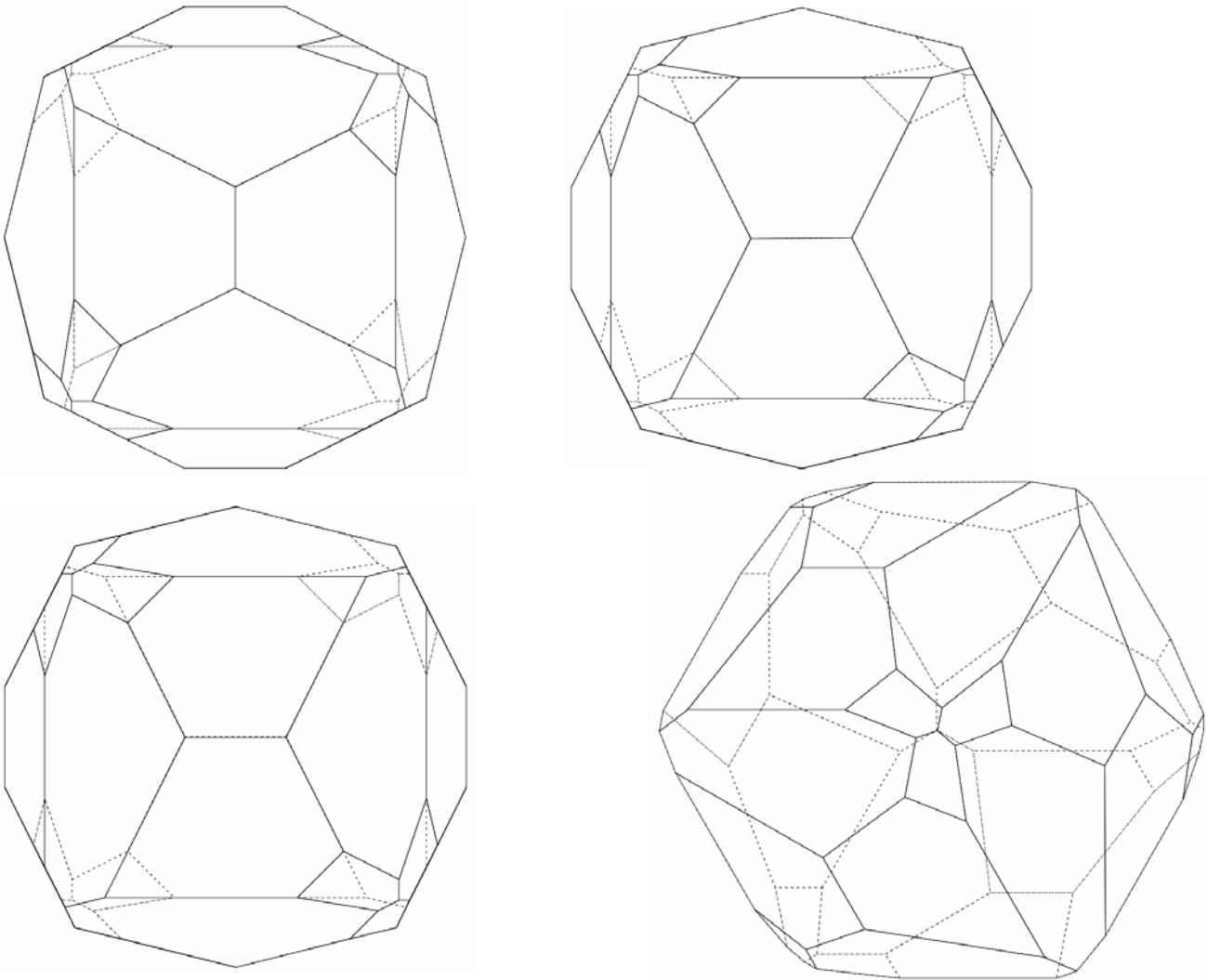
En la región de A y B homogeneizados, en dirección 1:

$$\rho_{AyBhomog_11} = 0.5 \cdot \rho_A + 0.5 \cdot \rho_B \quad \rho_{AyBhomog_11} = 484.5 \quad \Omega \text{ m}$$

La región de A y B homogeneizados y la región de A están eléctricamente en paralelo, por lo que la componente 11 de la resistividad eléctrica del compuesto T es:

$$\rho_{C_11} = \left(\frac{0.5}{\rho_{AyBhomog_11}} + \frac{0.5}{\rho_A} \right)^{-1} \quad \rho_{C_11} = 315.582 \quad \Omega \text{ m}$$

8. Determinar la clase cristalográfica a la que pertenece el siguiente monocristal eumórfico de un material cerámico:



- $3m$
- $4mm$
- 23
- $m\bar{3}$
- 432
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....

Sol.: el monocristal tiene 4 ejes de rotación ternarios y 3 ejes de rotación binarios. No hay centro de inversión, no hay ningún plano de reflexión. La clase es:

Problema 1

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:

Se ha sintetizado un nuevo material en el laboratorio del que, en las condiciones experimentales utilizadas, se pueden obtener monocristales sin excesiva dificultad. Con el fin de concretar las aplicaciones del material se han realizado varios ensayos con los resultados que se describen a continuación:

1. el monocristal puede utilizarse como sensor piroeléctrico en alarmas de movimiento.
2. se han determinado experimentalmente las componentes de la conductividad térmica del material en el sistema de referencia de ensayos del laboratorio (que necesariamente no tiene por qué coincidir con los ejes convencionales del monocristal). En este sistema de referencia la estructura de la conductividad térmica es la siguiente:

$$\underline{\underline{[k]}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \frac{W}{m K}$$

3. cuando el monocristal se somete a un tensor de esfuerzos cuyas componentes expresadas en los ejes convencionales son todas no nulas, $\tau_{ij} \neq 0$, no se observa acoplamiento entre deformaciones/tensiones tangenciales y normales.
4. cuando sobre el material se aplica un campo eléctrico en la dirección convencional $\textcircled{1}$ ($E_1 \neq 0$; $E_2 = E_3 = 0$), se produce deformación de cortadura en un solo plano.

Teniendo en cuenta los ensayos anteriores:

- a. Determinar **razonadamente** las posibles clases cristalográficas del material teniendo en cuenta, única y exclusivamente, la información proporcionada en el apartado 1.
- b. Determinar la estructura del tensor conductividad térmica en los ejes principales del material.
- c. Deducir las clases cristalográficas posibles para dicho material con la información de los apartados 1 y 2.
- d. Teniendo en cuenta **únicamente** la información del apartado 3 indicar a qué clases podría pertenecer el monocristal.
- e. A la vista de la información conjunta de los apartados 1, 2, 3 y 4, determinar la(s) clase(s) del material.
- f. Si del monocristal anterior se corta un cubo de lado L, determinar la variación dimensional de las aristas (ΔL en cada una de las direcciones convencionales) cuando el material se deforma debido a un aumento de temperatura ΔT , según $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}} \Delta T$ (expresar el resultado en función de las componentes de $\underline{\underline{\alpha}}$).

(3 puntos, 45 minutos)

Sol:

- a. De acuerdo con el apartado (1), si el monocristal puede utilizarse como sensor piroeléctrico, necesariamente ha de pertenecer a una de las clases polares: (ver 08_01_01, diapositiva 37)

1 2 *m* *mm*₂ 4 *4mm* 3 *3m* 6 *6mm*

- b. Para encontrar las componentes del tensor conductividad térmica (\underline{k}) en los ejes principales del monocristal solamente hay que diagonalizar la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 4$$

, por lo que la estructura de la propiedad en los ejes principales será

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \frac{W}{m \times K}$$

Lo que implica que el material pertenecerá a una de las clases de los sistemas tetragonal, trigonal o hexagonal (ver 02_02_01, diapositivas 11-12).

- c. Teniendo en cuenta la información anterior y la del apartado primero (clases polares), el monocristal pertenecerá necesariamente a una de las 6 clases siguientes:

4 *4mm* 3 *3m* 6 *6mm*

- d. Al **no** existir acoplamiento entre deformaciones/tensiones tangenciales y normales, el monocristal podría pertenecer a una de las clases siguientes (ver 09_02_02, diapositiva 5):

ortorrómbico (todas) *cúbico (todas)* *hexagonal (todas)* *tetragonal (4mm, $\bar{4}2m$, 422, 4/mmm)*

- e. Teniendo en cuenta la información del apartado 3 (no hay acoplamiento), hay que descartar las clases

4 3 *3m*

por lo que el material solamente podrá ser de las clases:

4mm 6 *6mm*

Por la información del apartado 4 (“cuando sobre el material se aplica un campo eléctrico en la dirección convencional \odot ($E_1 \neq 0$; $E_2 = E_3 = 0$), se produce deformación de cortadura en un solo plano”), se descarta la clase 6 quedando como posibles las clases:

4mm 6mm

ya que para un material de la clase 6 (ver 02_01_01, diapositivas 13-19):

$$(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6) = (E_1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el campo eléctrico anterior produciría **deformación de cortadura en dos planos**, 23 y 13:

$$\varepsilon_4 = E_1 d_{14}$$

$$\varepsilon_5 = E_1 d_{15}$$

f. La estructura del tensor deformación para las clases 4mm y 6mm es:

$$\left[\underline{\underline{\varepsilon}} \right] = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11}\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\Delta T \end{pmatrix}$$

y la variación en la longitud de las aristas será:

$$(\Delta L)_1 = (\Delta L)_2 = L\alpha_{11}\Delta T$$

$$(\Delta L)_3 = L\alpha_{33}\Delta T$$

Problema 2**Nombre:****Número de matrícula:**

Una pintura en dispersión (D) contiene un pigmento mineral sólido (M), una resina o polímero fluido (R), agua (W) como base de la dispersión. Si en el proceso de producción la concentración de los componentes fluidos W y R es demasiado alta, la pintura resulta diluida y no puede aplicarse correctamente.

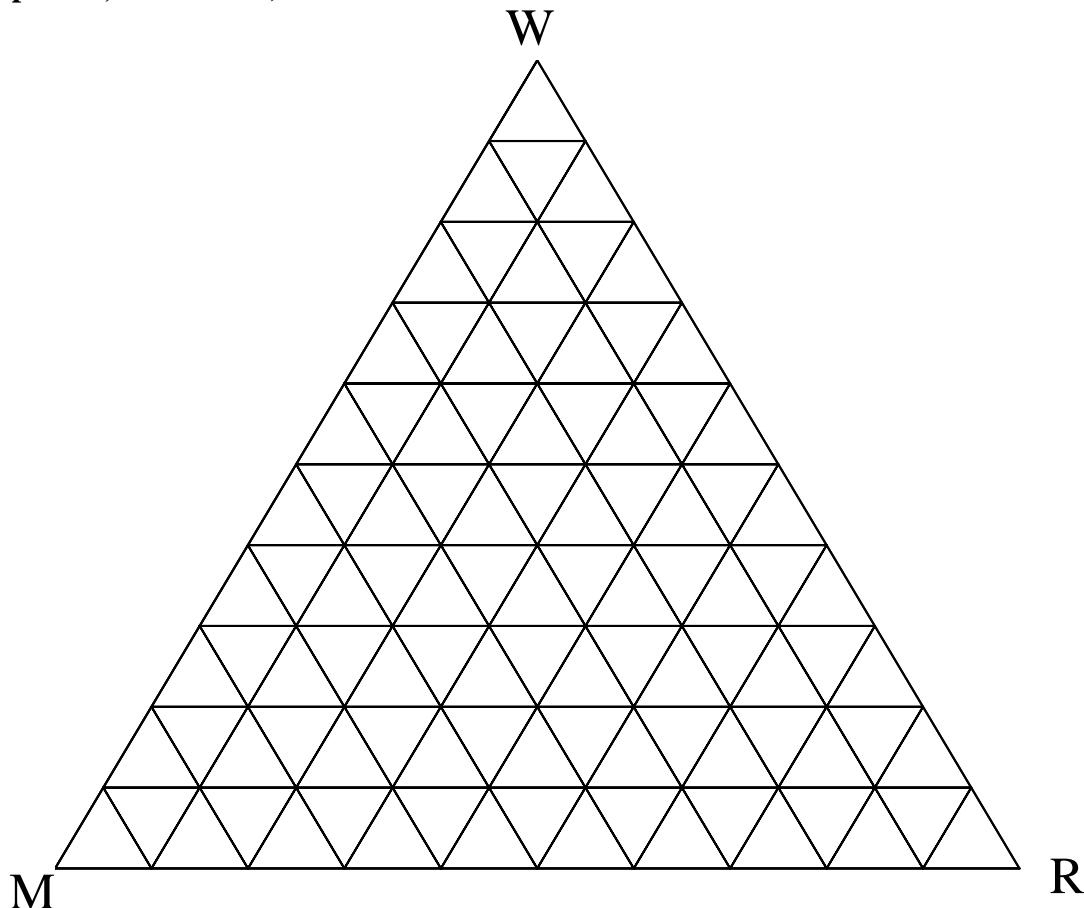
Se ha observado que esto sucede cuando $VD_R/\eta_R + VD_W/\eta_W$ es mayor que 0.422, donde VD_R y VD_W son las fracciones volumétricas de R y W en D, y $\eta_R = 1.613 \text{ Pa s}$ y $\eta_W = 1.471 \text{ Pa s}$ son sus viscosidades (la cantidad permisible de un componente fluido es mayor cuanto mayor sea su viscosidad). Cuando la pintura resulta excesivamente diluida, hay que concentrarla evaporando parte del agua (y solo del agua).

Dada una composición de la pintura D: $VD_M = 0.18$, $VD_W = 0.49$, determinar:

1. qué cantidad mínima W de agua (en m^3) hay que evaporar de cada m^3 de pintura D para que la dispersión se pueda aplicar correctamente.
2. cuál es la composición (VZ_M , VZ_R , VZ_W) de la dispersión final Z que resulta de D al eliminar el agua del apartado anterior, y que tiene la consistencia adecuada.

Considerar que los volúmenes son aditivos para los tres componentes (las mezclas son lineales). El problema puede hacerse bien con ayuda del diagrama triangular que se adjunta, o bien analíticamente.

(3 puntos, 45 minutos)



Sol.: se usa como base de cálculo 1 m^3 de **D**, cuya composición es:

$$VD_R = 1 - VD_M - VD_W$$

$$VD_M = 0.18$$

$$VD_W = 0.49$$

$$VD_R = 0.33$$

Los inversos de las viscosidades son: $\frac{1}{\eta_R} = 0.62$ $\frac{1}{\eta_W} = 0.68$

Puesto que $\frac{1}{\eta_R} \cdot VD_R + \frac{1}{\eta_W} \cdot VD_W = 0.538$ es mayor que **0.422**, la pintura es demasiado fluida y es necesario evaporar agua.

Método 1: la cantidad mínima de **W** que hay que separar se puede obtener resolviendo dos ecuaciones que expresan

1. que el producto resultante (**Z**) de la separación está exactamente en el límite de fluidez, y
2. que **D** es una mezcla de **W** pura y de **Z**:

La condición 1., expresando VZ_R como $1 - VZ_M - VZ_W$, implica:

$$\frac{1}{\eta_R} (1 - VZ_M - VZ_W) + \frac{1}{\eta_W} VZ_W = 0.422 \quad (\text{Z cumple la condición exactamente})$$

La condición 2. implica que el agua que hay en **D** es la suma del agua que hay en **W** y el agua que hay en **Z** (de **Z** hay una cantidad $1-W \text{ m}^3$); e igualmente, el **M** que hay en **D** es la suma del **M** que hay en **W** y el **M** que hay en **Z**:

$$\underbrace{W}_{\text{agua en W}} + \underbrace{(1-W)VZ_W}_{\text{agua en Z}} = \underbrace{VD_W}_{\text{agua en D}}$$

$$\underbrace{0}_{\text{M en W}} + \underbrace{(1-W)VZ_M}_{\text{M en Z}} = \underbrace{VD_M}_{\text{M en D}}$$

Método 2: (solución gráfica en fracciones volumétricas) la especificación del problema (con el signo igual en vez ">") es una línea recta en un diagrama triangular cuyos vértices son **R**, **M** y **W**. Para representarla basta con dibujar dos puntos de la misma dando valores a VD_M y VD_W y uniendo los dos puntos (línea azul en el diagrama triangular).

Como **Z** debe obtenerse separando **W** de **D**, para obtener el punto representativo de **Z** se

prolonga la recta que une W con D (línea verde en el diagrama triangular) hasta que corte con la línea de la especificación. La composición de Z se lee directamente del diagrama.

La cantidad en m^3 de W que se separa por cada m^3 de D se calcula con ayuda de la regla de la palanca (relación entre las longitudes de los segmentos DZ y WZ), y se obtienen los mismos resultados.

