Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

- **sólo una respuesta es correcta**
- **sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos**
- **usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos**
- **60 min, 0.5 puntos cada problema**

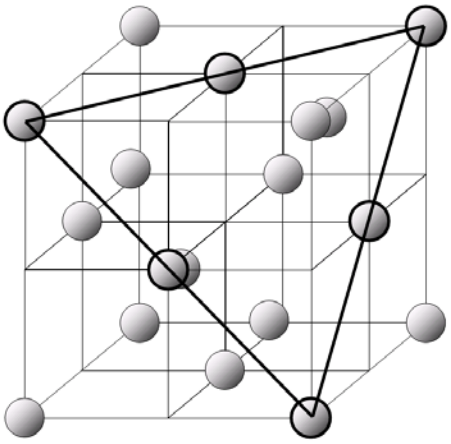
Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.
Las preactas se publicarán no más tarde del día 18 de junio y la revisión de examen será el martes 22 de junio a las 11:30 en la sala de profesores de la 2ª planta.

---

1. Un semiconductor A cuyo radio atómica es $r_A = 3.2 \times 10^{-10}$ m, cristaliza en la estructura cúbica del diamante. Determinar la densidad superficial atómica (átomos de A / m ^{2}) para los planos cristalográficos de la forma {111}.

- 7.518×10^{18} átomos de A / m^2
- 1.057×10^{18} átomos de A / m^2
- 2.455×10^{18} átomos de A / m^2
- 2.999×10^{18} átomos de A / m^2
- 6.44×10^{17} átomos de A / m^2
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: en la figura se representa la intersección de uno de los planos de la forma indicada con la celda unidad. La intersección es un triángulo equilátero (marcado con línea gruesa). Este triángulo contiene 3 átomos en los vértices (cada uno contribuye 1/6) y 3 átomos en la mitad de los lados (cada uno contribuye 1/2), es decir, un total de $\frac{3}{6} + \frac{3}{2} = 2$ **átomos (marcados también con línea gruesa).**
El parámetro de celda (la arista del cubo) está relacionada con el radio del átomo por (ver fig. 13.15, p. 454):



$$a = \frac{8}{\sqrt{3}} r_A \qquad a = 1.478 \times 10^{-9} \text{ m}$$

El lado del triángulo es: $L = \sqrt{2}\,a$

y como es equilátero:

$$A = \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad A = 1.892 \times 10^{-18} \text{ m}^2$$

También puede usarse la fórmula de Herón

Semiperímetro: $s = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot L$

Área: $$A = \sqrt{s \cdot (s-L) \cdot (s-L) \cdot (s-L)} \qquad A = 1.892 \times 10^{-18} \text{ m}^2$$

O bien, el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que forman dos lados del mismo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \right| \qquad A = 1.892 \times 10^{-18} \text{ m}^2$$

Y la densidad atómica superficial:

$$\frac{\frac{3}{6} + \frac{3}{2}}{A} = 1.057 \times 10^{18} \text{ átomos/m}^2$$

2. Un material usado en acumuladores de calor se puede considerar como un compuesto de dos componentes A y B. Los calores específicos y las densidades de los dos componentes son

$Cp_A = 5.55 \times 10^3$ J/kgK, $Cp_B = 7.63 \times 10^3$ J/kgK, $\rho_A = 1.29 \times 10^3$ kg/m^3, y

$\rho_B = 2.445 \times 10^3$ kg/m^3, respectivamente. La fracción volumétrica de A es $V_A = 0.2$. Determinar el calor específico por unidad de volumen del compuesto (en J/m^{3}K).

- 1.636×10^7 J/m^{3}K
- 7.455×10^6 J/m^{3}K
- 3.681×10^7 J/m^{3}K
- 4.954×10^6 J/m^{3}K
- 6.722×10^6 J/m^{3}K
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: en 1 m^3 de compuesto hay $V_A = 0.2$ m^3 de A y $1 - V_A = 0.8$ m^3 de B. Sus masas son $V_A \cdot \rho_A = 258$ kg y $(1 - V_A) \cdot \rho_B = 1956$ kg. El calor específico de esta masa contenida en 1 m^3 es directamente la magnitud pedida:

$$V_A \cdot \rho_A \cdot Cp_A + (1 - V_A) \cdot \rho_B \cdot Cp_B = 1.636 \times 10^7 \quad \text{J/m}^3\text{K}$$

3. Una resistencia eléctrica está fabricada con un metal. La resistencia se mide a dos temperaturas, $T_1 = 367$ y $T_2 = 589$ K, y se obtienen los valores $R_1 = 304.2$ Ω y $R_2 = 416.9$ Ω respectivamente. Determinar qué valor de la resistencia se medirá a $T_3 = 500$ K.

- $371.7\,\Omega$
- $194.58\,\Omega$
- $695.96\,\Omega$
- $277.3\,\Omega$
- $482.27\,\Omega$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: la resistividad de un metal varía linealmente con la temperatura (ec. 13.18, p 451) en el intervalo de valores de T dados. Puesto que la resistencia es proporcional a la resistividad, la resistencia también variará linealmente:

$$R(T) \propto \rho(T)\frac{L}{S} \propto \rho_0\left(1+\alpha_T T\right)\frac{L}{S}$$

Por tanto, conocidos dos valores de R a dos temperaturas, el valor de R a otra temperatura se puede obtener interpolando linealmente entre los valores dados:

$$R_3 = R_1 + \left(R_2 - R_1\right)\cdot\frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} \qquad R_3 = 371.7 \quad \Omega$$

4. Un elemento de la suspensión de un vehículo es un bloque cilíndrico de un elastómero (caucho sintético) de altura $h = 0.11$ m y diámetro $D = 0.08$ m. Se especifica que cuando este elemento se someta a una fuerza de compresión de $F = 3.2 \times 10^{4}$ N (actuando sobre las bases del cilindro), no debe reducirse su altura en más de $\Delta h = 8 \times 10^{-3}$ m. La relación entre esfuerzo mecánico τ y elongación λ para este eslastómero está data por:

$$\tau(\lambda) = E\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

donde la elongación se define como: $$\lambda = \frac{h_{\text{bajo carga}}}{h_{\text{sin carga}}}$$

Determinar qué módulo E debe tener este material, como mínimo, para cumplir la especificación dada.

- 2.587×10^{7} Pa
- 1.304×10^{8} Pa
- 2.700×10^{7} Pa
- 8.987×10^{6} Pa
- 2.058×10^{7} Pa
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: de los datos obtenemos inmediatamente la elongación y el esfuerzo:

$$\lambda = \frac{h - \Delta h}{h} \qquad \lambda = 0.927 \qquad \tau = \frac{-F}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \qquad \tau = -6.366 \times 10^{6}$$

Por tanto:

$$E = \frac{\tau}{\lambda - \frac{1}{\lambda^2}} \qquad E = 2.7 \times 10^{7} \text{ Pa}$$

5. Un bit sobre la superficie de un DVD o CD-ROM ocupa, de modo aproximado, un cuadrado de lado igual a la longitud de onda del láser de lectura. Estima cúantos bits pueden almacenarse en una cara de un disco de diámetro $D = 0.09$ m con un láser semiconductor en el que la emisión láser tiene lugar entre dos niveles cuya diferencia de energía es de $\Delta E = 3.1$ eV. Supón que el disco es un círculo y su superficie se aprovecha completamente (no tener en cuenta la perforación central).

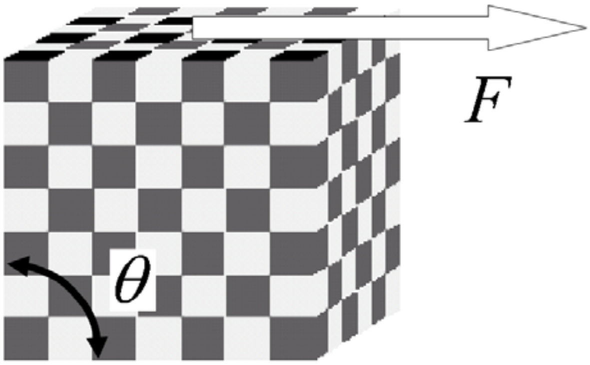
- 5.755×10^{10} bits
- 3.968×10^{10} bits
- 5.058×10^{10} bits
- 3.249×10^{10} bits
- 1.141×10^{10} bits
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: de los datos obtenemos inmediatamente la longitud de onda del láser:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E \cdot 1.60 \cdot 10^{-19}} \qquad \lambda = 4.004 \times 10^{-7} \text{ m}$$

por tanto, el número de bits que caben en una cara es: $\dfrac{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}{\lambda^2} = 3.968 \times 10^{10}$ bits

6. Un material compuesto tiene una estructura formada por cubos de dos materiales A y B (gris y negro en la figura). A y B son sólidos homogéneos e isótropos.



Un bloque cúbico, de lado $L = 0.3$ m de este material está fijo en su base y se somete a una fuerza de módulo $F = 563$ N que actúa sobre toda la cara superior del cubo como se indica en la figura.

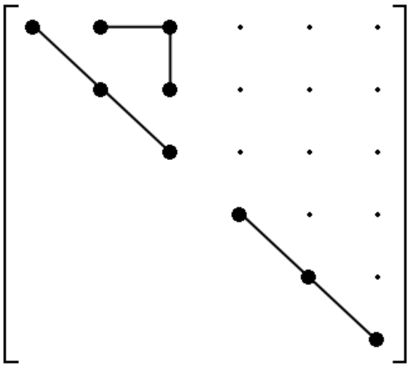
Los módulos a cortadura de A y de B son $G_A = 5.56 \times 10^7$ Pa y $G_B = 1.668 \times 10^7$ Pa, el módulo a cortadura del compuesto se obtiene de la regla de mezcla $G_{compuesto} = \sqrt{G_A \cdot G_B}$. Determina cuánto se reduce el ángulo θ debido a la acción de la fuerza F.

- 1.192×10^{-4} rad
- 3.809×10^{-3} rad
- 7.254×10^{-3} rad
- 2.054×10^{-4} rad
- 2.609×10^{-3} rad
- inguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: de la regla de mezcla obtenemos el módulo a cortadura del compuesto:

$$G_{compuesto} = \sqrt{G_A \cdot G_B} \qquad G_{compuesto} = 3.045 \times 10^7 \ \text{Pa}$$

Por otro lado, el material es cúbico, y por tanto la estructura de su matriz de complianza elástica es (ver 02_01_02):

$str(\underset{\sim}{s}) =$ 

Al ser cúbico, los eje convencionales son paralelos a las aristas del cubo, y por tanto la fuerza que actúa sobre la cara indicada produce un esfuerzo (tensión) mecánica τ_{23}, **que en notación de Voigt es** τ_4**. Aplicando:**

$$\vec{\varepsilon} = \underset{\sim}{S}\vec{\tau}$$

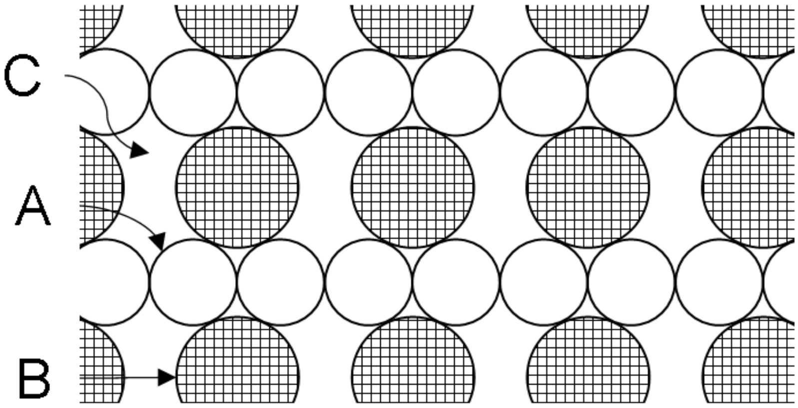
$$\varepsilon_i = S_{ij}\tau_j$$

obtenemos la deformación a cortadura:

$$2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4 = s_{44}\tau_4 = \frac{1}{G_{compuesto}}\tau_4 = \frac{F}{L^2 G_{compuesto}} = \frac{F}{L^2\sqrt{G_A G_B}}$$

$$\frac{F}{L^2\cdot\sqrt{G_A\cdot G_B}} = 2.054\times 10^{-4} \text{ rad}$$

7. Un material está compuesto de fibras cilíndricas de dos materiales A y B orientadas paralelamente entre sí, dentro de una matriz de un tercer material C. La sección del compuesto, transversal a los ejes de las fibras se indica en la figura. A, B y C son homogéneos e isótropos. El compuesto se utiliza como material aislante térmico.

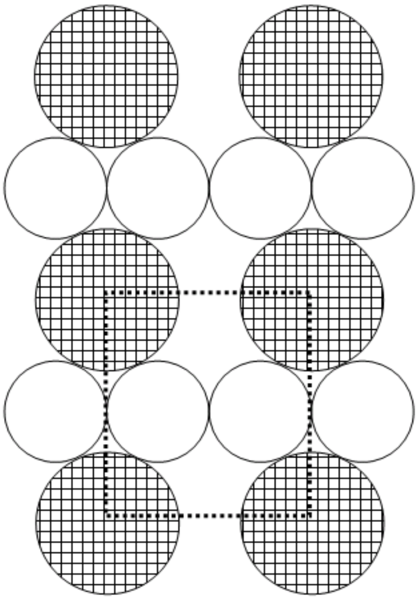


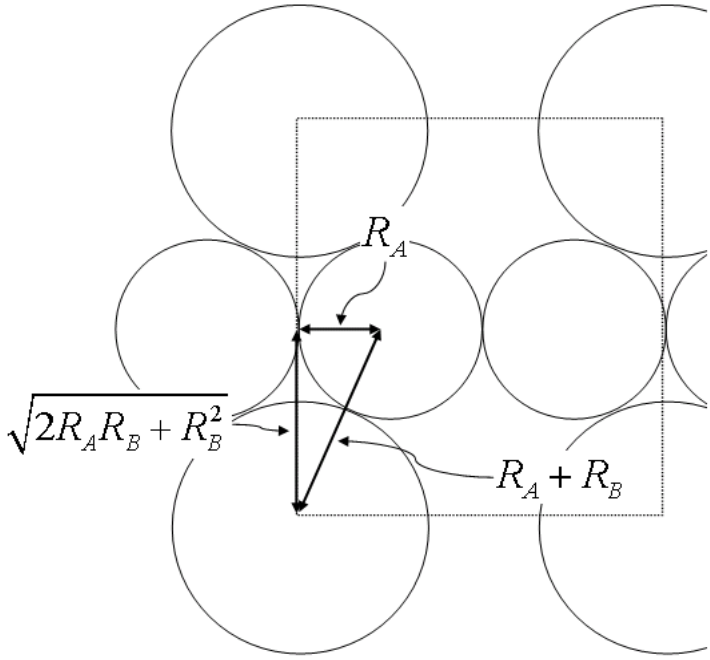
Los radios de los dos tipos de fibras y las conductividades térmicas de los tres componentes son conocidos: $R_A = 4 \times 10^{-3}$ m, $R_B = 4.56 \times 10^{-3}$, $k_A = 5.6 \times 10^{-3}$, $k_B = 6.1 \times 10^{-3}$ y $k_C = 0.016$ W/mK. Determinar la conductividad térmica del compuesto en la dirección de las fibras.

- 2.534×10^{-3} W/mK
- 8.886×10^{-3} W/mK
- 4.621×10^{-3} W/mK
- 5.145×10^{-3} W/mK
- 7.849×10^{-3} W/mK
- inguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: en la dirección de las fibras, los tres componentes se encuentran en isogradiente (el gradiente de temperatura es la misma a lo largo de las fibras de A, de las fibras de B y de la matriz C), con lo cual, la regla de mezcla debe ser tipo Voigt para una propiedad como la conductividad térmica.

Por otro lado, las fracciones volumétricas de los tres componentes se obtienen de la geometría dada. Por ejemplo, calculando las fracciones que ocupa cada componente en un área como la marcada por la línea de puntos:



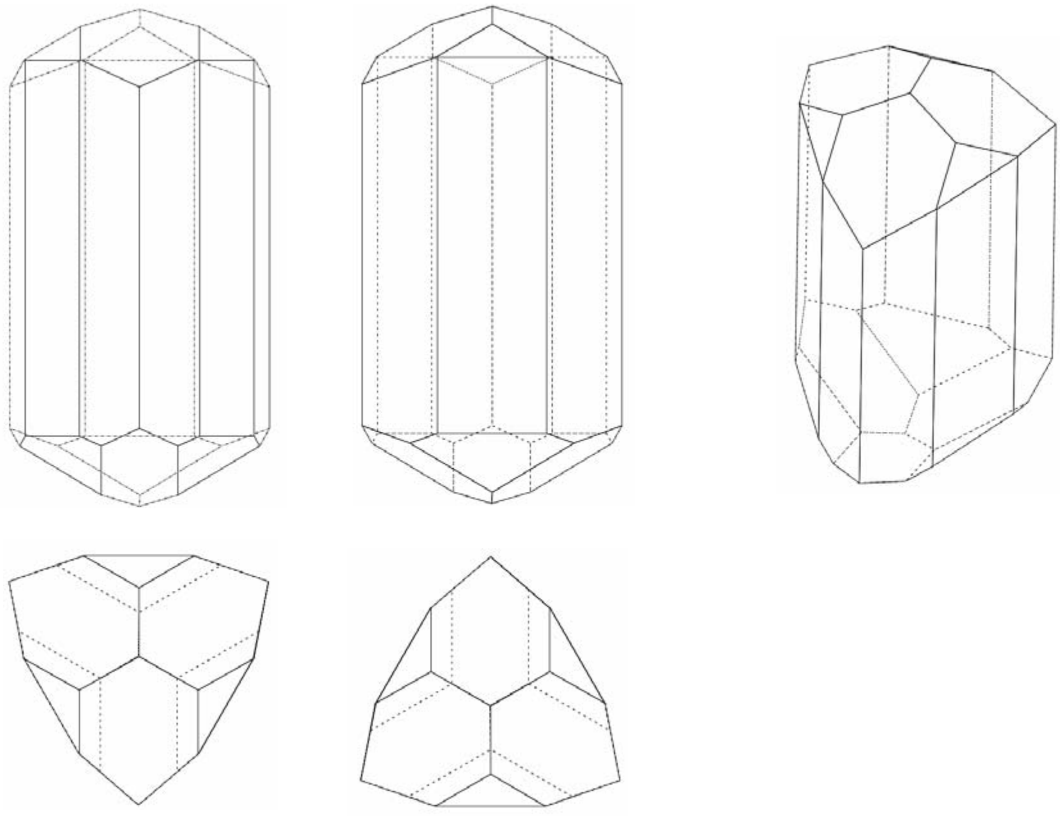


$$V_A = \frac{2\cdot\pi\cdot R_A^{\,2}}{4\cdot R_A\cdot 2\sqrt{2\cdot R_A\cdot R_B + R_B^{\,2}}} \qquad V_B = \frac{\pi\cdot R_B^{\,2}}{4\cdot R_A\cdot 2\sqrt{2\cdot R_A\cdot R_B + R_B^{\,2}}} \qquad V_C = 1 - V_A - V_B$$

$$V_A = 0.415 \qquad V_B = 0.27 \qquad V_C = 0.315$$

$$k_{compuesto} = V_A\cdot k_A + V_B\cdot k_B + V_C\cdot k_C \qquad k_{compuesto} = 8.886 \times 10^{-3}$$ W/mK

8. Determinar la clase cristalográfica del siguiente cristal cerámico:



- $\boxed{6/m}$
- $\boxed{\bar{3}m}$
- $3m$
- $\bar{6}m2$
- 6
- $\boxed{\bar{3}}$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: la clase es 3m

Problema 1

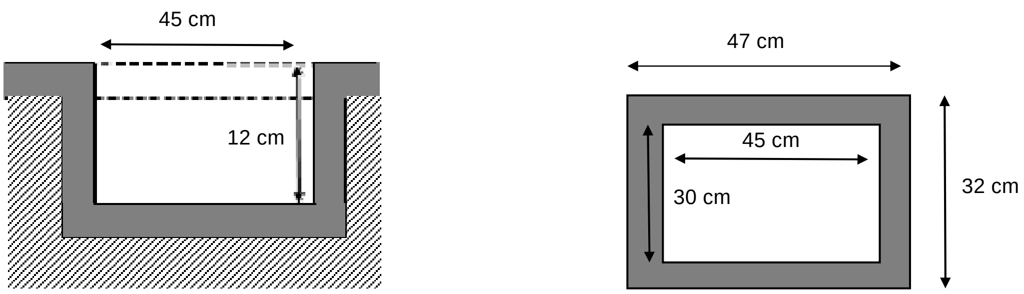
Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

El ABS (*a*crilonitrilo-*b*utadieno-*e*stireno) es un termoplástico muy utilizado en ingeniería debido a sus propiedades, ya que combina una buena resistencia mecánica y al impacto con la facilidad de su procesamiento. Se dispone de un ABS con la siguiente composición másica: poliacrilonitrilo 25%; polibutadieno: 25% y poliestireno: 50% para la fabricación de bandejas rectangulares con una cavidad de 45 x 30 cm y profundidad 12 cm (ver figura). Estas piezas pueden fabricarse por termoformado o por moldeo por inyección.
Las características y costes relativos de cada uno de los procesos se relacionan a continuación:

- **Termoformado**:
  Como materia prima se utilizan láminas de ABS de 3 mm de espesor, disponible comercialmente en hojas de 200 x 120 cm a 2300 €/tonelada. Para el proceso de fabricación es necesario precortar la lámina en piezas de 55 x 40 cm, que después del proceso de termoformado se recortan hasta la dimensión final de 47 x 32 cm (figura). El molde necesario para la fabricación de la bandeja supone 4000 €, la hora de producción en fábrica 12 € y el tiempo necesario para obtener una pieza es de 90 s. Se pueden abaratar algo los costes de producción ya que toda la materia prima de recorte sobrante se puede vender a un precio de 500€/tonelada.
- **Moldeo por inyección**
  Se obtienen bandejas con las dimensiones requeridas y una masa de 465 g. La materia prima empleada en este caso es ABS en forma de gránulos (granza) a 1600€/tonelada. El molde supone 16000 €, la hora de producción en fábrica 25 € y el tiempo de procesamiento por pieza es de 30s. Aproximadamente un 5% del total de piezas elaboradas resulta defectuoso, pudiéndose vender como materia prima para reciclar al precio de 500€/tonelada.
  1. Determina la densidad del ABS
  2. Determina el coste de producción por bandeja (sin incluir el precio del molde) en cada uno de los procesos
  3. Considerando ahora todos los costes, determina a partir de qué número de piezas resulta rentable el moldeo por inyección.

Datos: densidad poliacrilonitrilo= 1.15 g/cm^3 densidad polibutadieno = 0.89 g/cm^3
densidad poliestireno 1.06 g/cm^3
Los dibujos no están realizados a escala

(3 puntos, 45 minutos)



vista lateral vista superior

Sol:

1. Densidad del ABS:

Conocidas las fracciones másicas:

$$\frac{1}{\rho_{ABS}} = \frac{X_A}{\rho_A} + \frac{X_B}{\rho_B} + \frac{X_{PS}}{\rho_{PS}} \Rightarrow \rho_{ABS} = 1030.9 kg/m^3$$

2. **Coste (sin incluir el precio del molde) para termoformado**

De cada lámina de 200x120cm se pueden obtener 10 piezas (10 futuras bandejas) de 55 x 40:

$$\text{número de piezas por lámina} = \frac{200\times120}{55\times40} = 10.9 \Rightarrow 10 \text{ piezas} \Rightarrow 10 \text{ bandejas}$$

$$\text{coste materia prima por bandeja}=\frac{1}{10}\times\frac{2300}{1000}\times\frac{200\times120\times0.3\times10^{-6}\times1030.9}{1} = 1.7072€$$

$$\text{coste tiempo}=\frac{12}{3600}\times90 = 0.3€$$

$$\text{ganancia reciclaje materia prima} = \frac{1}{10}\times\frac{500}{1000}\times1030.9\times(200\times120\times0.3\times10^{-6} - 10\times47\times32\times0.3\times10^{-6}) = 0.13855€$$

coste total sin molde por bandeja = 1.7072 + 0.3 - 0.13855=1.8686 €

Coste (sin incluir el precio del molde) para inyección:

$$\text{coste materia prima por bandeja}=\frac{1600}{1000}\times0.465 = 0.7440€$$

$$\text{coste tiempo}=\frac{25}{3600}\times30 = 0.20833 €$$

$$\text{ganancia reciclaje materia prima} = \frac{500}{1000}\times0.05\times0.465 = 0.011625 €$$

coste total sin molde por bandeja = 0.7440 + 0.20833 - 0.011625=0.94071 €

3. **Número de piezas**

coste total termoformado n bandejas $= 1.8686\times n + 4000$

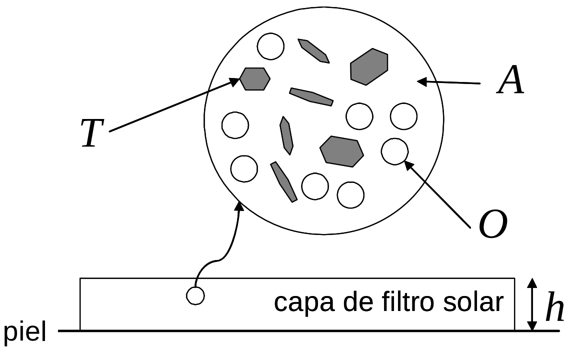
coste total moldeo inyección n bandejas =0.94071× n + 16000

Igualar y resolver: n=12933 bandejas

Problema 2

Nombre: **Número de matrícula:**

Se desea fabricar un filtro solar F (crema) que absorba exactamente el $S1 = 99$ % de la radiación incidente sobre la piel, cuando se aplica en una capa de espesor de $h = 3 \times 10^{-5}$ m. El filtro solar F se pueden considerar como un material compuesto (ver figura) por una matriz acuosa A, en la que están dispersas al azar partículas de un pigmento inorgánico T y gotas de un componente orgánico O (aceite).



De los tres componentes se conocen los coeficientes de absorción óptica lineal, las densidades másicas y los precios de los tres componentes (todas ellas son propiedades escalares):

$\alpha_A = 2.2$	m^{-1}	$\rho_A = 978$	kg/m^3	$p_A = 2.21$	€/kg
$\alpha_T = 3.73 \times 10^5$	m^{-1}	$\rho_T = 2900$	kg/m^3	$p_T = 4.57$	€/kg
$\alpha_O = 1.69 \times 10^5$	m^{-1}	$\rho_O = 702$	kg/m^3	$p_O = 18.29$	€/kg

y el coeficiente de absorción óptica lineal de F (α_F) es una mezcla lineal (regla de Voigt) de los coeficientes α de los tres componentes.
Además de la especificación S1, el filtro solar, para que tenga la viscosidad adecuada, debe contener una fracción volumétrica de los componentes que están dispersos, es decir, de T y O juntos, comprendida entre los valores: $S2 = 0.42$ y $S3 = 0.89$.
Por último, por compatibilidad con la piel es necesario que F contenga una fracción volumétrica del componente orgánico (O) igual o superior a $S4 = 0.12$.
Determinar:
la composición en fracciones volumétricas V_O, V_T, V_A del filtro solar F que, cumpliendo todas las especificaciones, tiene precio volumétrico (€/m^3) mínimo.

1. el precio de F (€/m^3).
2. la densidad de F (kg/m^3).

Este problema conviene hacerlo con ayuda del diagrama triangular que se adjunta y representando en él las especificaciones. La solución analítica es bastante más costosa.

(3 puntos, 45 minutos)

Con los datos dados, el coste mínimo se encuentra para la composición marcada con el círculo en el diagrama, del que se lee directamente la solución:

$V_T = 0.357$ $V_A = 0.523$ $V_O = 1 - V_T - V_A$ $V_O = 0.12$

Con ayuda del diagrama es inmediato verificar que este punto cumple todas las especificaciones. Su precio volumétrico es mínimo e igual a:

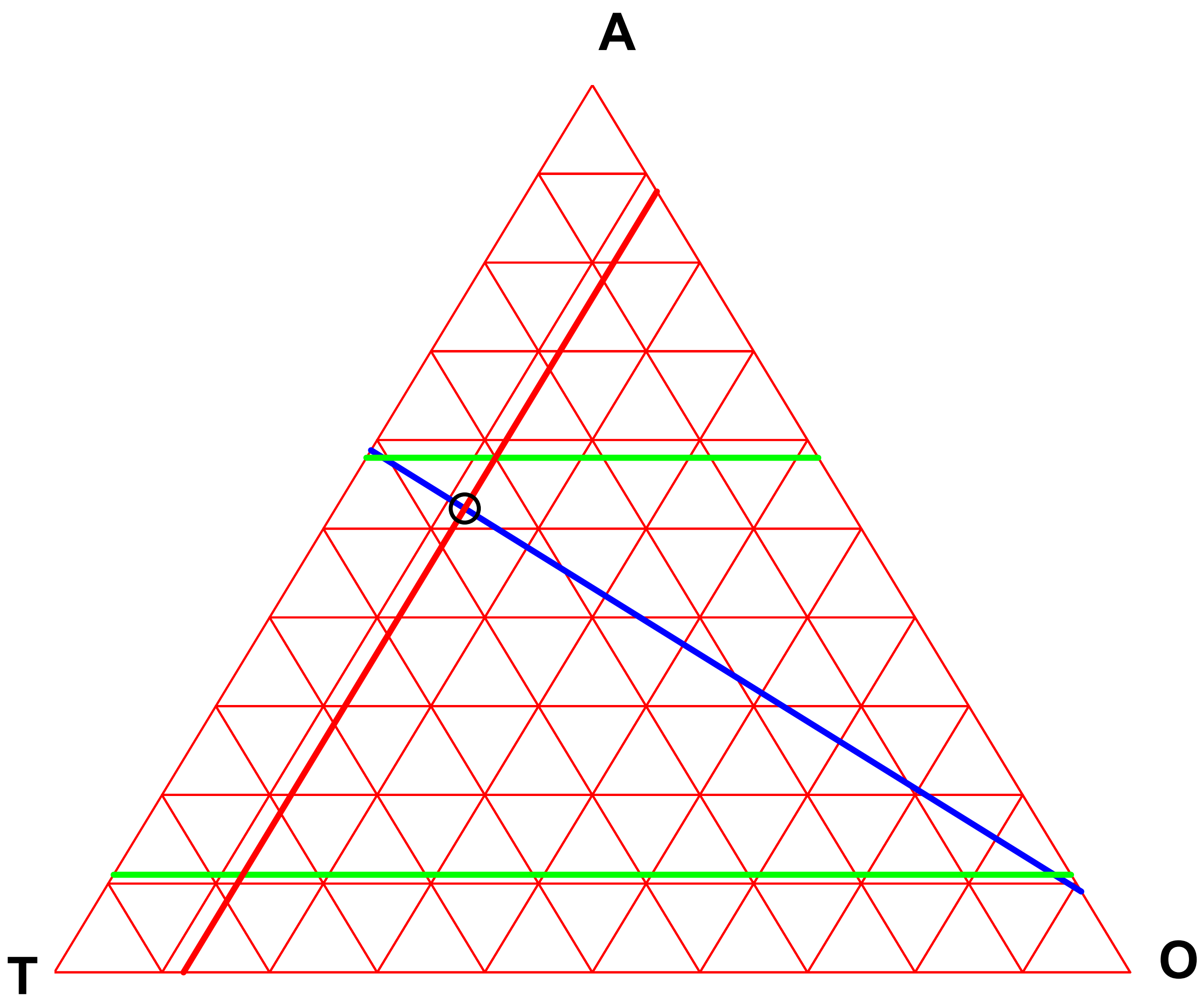
$$Precio_{min} = p_T \cdot \rho_T \cdot V_T + V_O \cdot \rho_O \cdot p_O + p_A \cdot \rho_A \cdot V_A$$

$Precio_{min} = 7404.67$ €/m^3

Puede comprobarse que el otro extremo de la línea S1 que está dentro del área donde se cumplen todas las especificaciones tiene precio máximo.

Por último, la densidad se obtiene de la mezcla ponderada de las densidades:

$V_T \cdot \rho_T + V_O \cdot \rho_O + V_A \cdot \rho_A = 1631.4$ kg/m^3



Método 2 (poco práctico): alternativamente, puede hacerse analíticamente determinando las dos soluciones del sistema de ecuaciones e inecuaciones formado por todas las especificaciones del problema:

$$V_T \cdot \alpha_T + \left(1 - V_T - V_A\right) \cdot \alpha_O + V_A \cdot \alpha_A = \alpha_F$$

$$V_A \leq 1 - S2$$

$$V_A \geq 1 - S3$$

$$V_T + V_A \leq 1 - S4$$

$$V_T \geq 0$$

calculando acto seguido el precio de las dos soluciones obtenidas por medio de:

$$\text{Precio}\left(V_T, V_A\right) = p_T \cdot \rho_T \cdot V_T + \left(1 - V_T - V_A\right) \cdot p_O \cdot \rho_O + p_A \cdot \rho_A \cdot V_A$$

y finalmente eligiendo entre esas dos la solución (composición) que produzca el menor precio con la fórmula anterior.