Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

- **<u>sólo se calificarán los problemas en los que se haya marcado una respuesta</u>.**
- **sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, <u>no usar ningún otro papel ni lápiz</u>**
- **80 min, 0.5 puntos cada problema**

Las soluciones aparecerán mañana en AulaWeb. Las notas se publicarán en AulaWeb el día 6 de julio y la revisión de examen será el 8 de julio a las 10:00 horas en la sala R3.

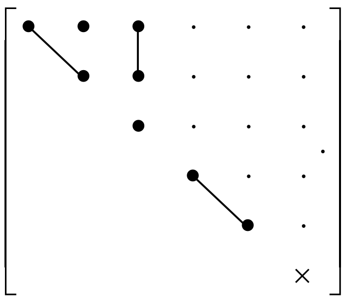
1. Se conocen las siguientes complianzas elásticas (todas en Pa^{-1}) de una fibra de kevlar orientada unidireccionalmente:

$$s_{1111} = 4.1 \times 10^{-8} \quad s_{3333} = 8.9 \times 10^{-9} \quad s_{2211} = -1.23 \times 10^{-8} \quad s_{1133} = -2.3 \times 10^{-9} \quad s_{2323} = 3.1 \times 10^{-9}$$

Determinar la componente c_{1212} de la rigidez elástica de la fibra en Pa.

- $4.583 \cdot 10^{6}$ Pa
- $5.285 \cdot 10^{7}$ Pa
- $3.222 \cdot 10^{8}$ Pa
- $6.305 \cdot 10^{6}$ Pa
- $9.381 \cdot 10^{6}$ Pa
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es: ....

Sol.: una fibra de kevlar orientada unidireccionalmente pertenece a la clase ∞ / mm **y sus matrices de complianza y de rigidez elástica tienen la siguiente estructura:**



Para $\utilde{s} \rightarrow \times = 2\left(s_{11} - s_{12}\right)$

y para $\utilde{c} \rightarrow \times = \frac{1}{2}\left(c_{11} - c_{12}\right)$

y se verifica que : $\utilde{s} = \utilde{c}^{-1}$

Como el cuadrante inferior derecho es diagonal, se pueden invertir directamente las componentes s_{44} **y** s_{66} **para obtener las componentes** c_{44} **y** c_{66} **, es decir:**

$$c_{66} = c_{1212} = \frac{1}{s_{66}} = \frac{1}{2\left(s_{11} - s_{12}\right)} = \frac{1}{2\left(s_{1111} - s_{1122}\right)} = \frac{1}{2\left(s_{1111} - s_{2211}\right)}$$

y la rigidez elástica pedida es:

$$c_{1212} = \frac{1}{2\left(s_{1111} - s_{2211}\right)} \qquad c_{1212} = 9.381 \times 10^{6} \quad \text{Pa}$$

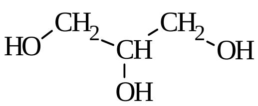
<u>No es correcto</u> hallar las siguientes "componentes falsas":

$$c_{1111} = \frac{1}{s_{1111}} \qquad c_{1122} = \frac{1}{s_{2211}} \qquad \textbf{y aplicar} \qquad \frac{1}{2}\left(c_{1111} - c_{1122}\right) = 5.285 \times 10^{7}$$

porque el cuadrante superior izquierdo no es diagonal; para hallar su inversa no se puede invertir cada término, sino que hay que invertir la matriz completa (aprendido en Álgebra).

2. Un poliuretano reticulado (P) se obtiene por la reacción de dos monómeros A y Z en cantidades estequiométricas y con conversión total. Determinar la masa (kg) de monómeros necesaria para obtener 1 kg de P.

Masas atómicas: $Mw_O = 16 \quad Mw_H = 1 \quad Mw_C = 12 \quad Mw_N = 14 \quad$ kg/kmol

A: 

Z: $O{=}C{=}N{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}N{=}C{=}O$

- 0.665 kg de A y 0.335 kg de B
- 0.335 kg de A y 0.665 kg de B
- 0.327 kg de A y 0.673 kg de B
- 0.673 kg de A y 0.327 kg de B
- 0.523 kg de A y 0.477 kg de B
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:..

Sol.: las masas moleculares de los monómeros son:

$$Mw_A = 3Mw_C + 3Mw_O + 8Mw_H \qquad Mw_A = 92 \quad \text{kg/kmol}$$

$$Mw_Z = 5Mw_C + 2Mw_O + 6Mw_H + 2Mw_N \qquad Mw_Z = 126 \quad \text{kg/kmol}$$

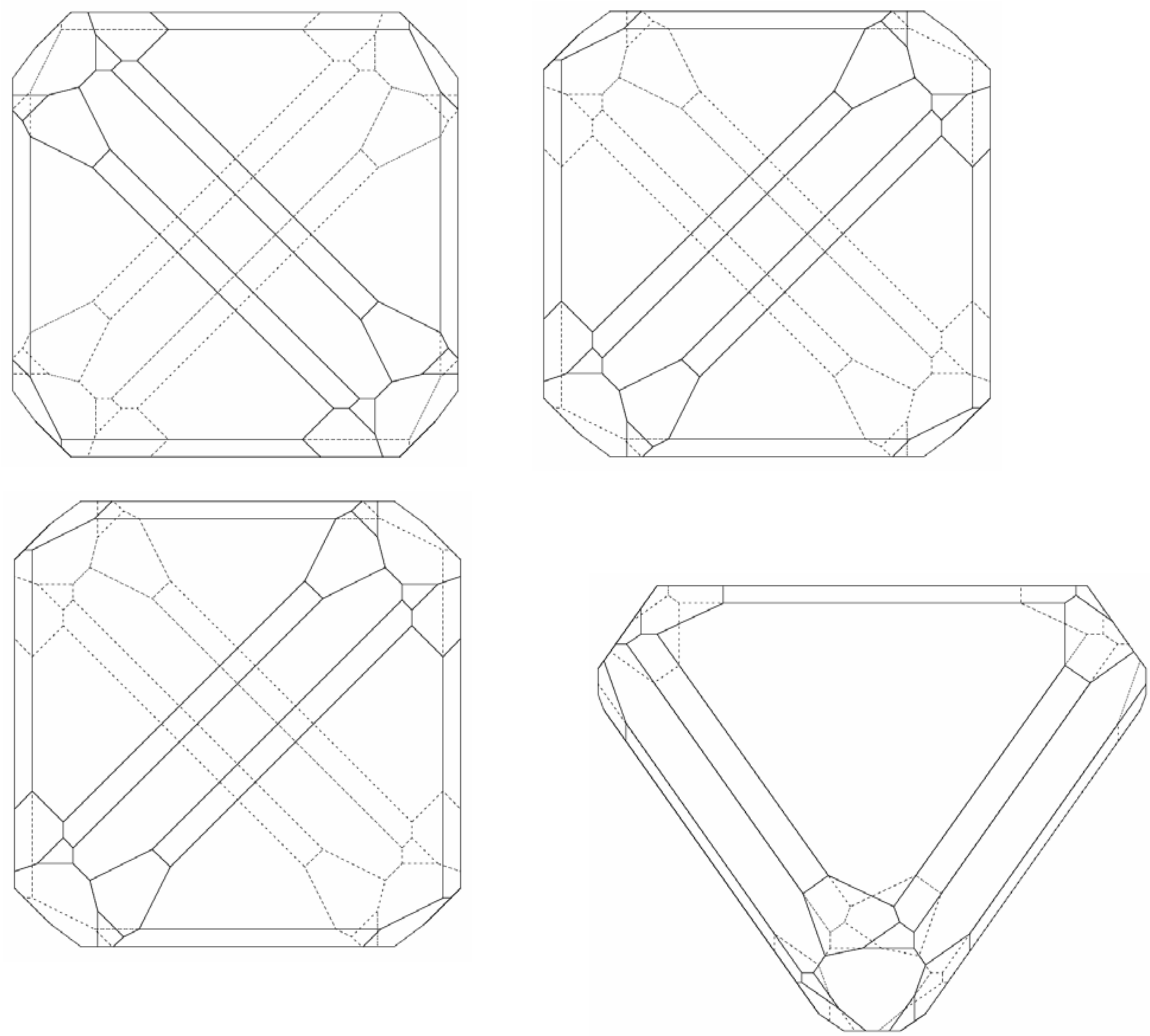
El poliuretano es reticulado porque el monómero A es trifuncional. Si reaccionan en cantidades estequiométricas hasta que se consumen totalmente los reactivos, deben reaccionar 2 kmol de A con 3 kmol de Z para formar 1 kmol de UER de P. La fracción másica de A en el poliuretano será:

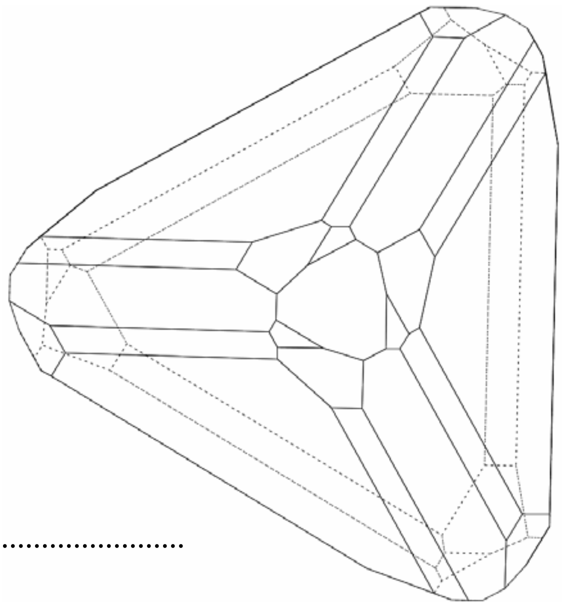
$$X_A = \frac{2Mw_A}{2Mw_A + 3Mw_Z} \qquad X_Z = 1 - X_A$$

$$X_A = 0.327 \qquad X_Z = 0.673$$

luego por cada kg de P se necesitan $X_A = 0.327$ kg de A y $X_Z = 0.673$ kg de B.

3. Determinar a qué clase cristalográfica pertenece el siguiente monocristal:





- $m3$
- $m3m$
- 23
- 432
- $\bar{4}$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es: ....

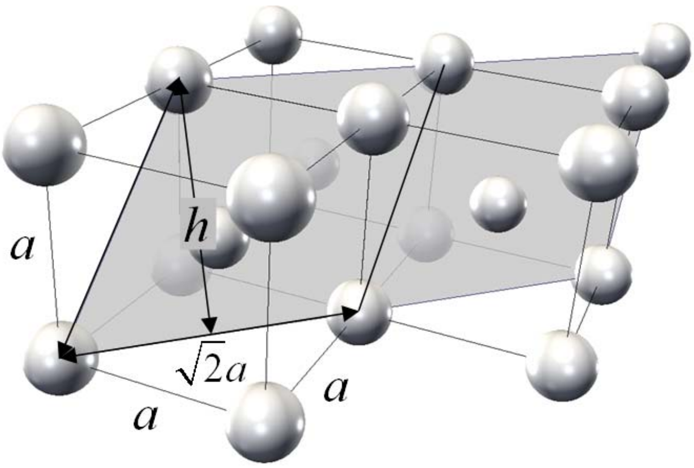
Sol.: el cristal tiene 4 ejes de rotación ternarios y 3 ejes de rotación binarios. No tiene ni centro de inversión ni planos de reflexión; pertenece a la clase:

23

4. Un material cerámico AB cristaliza en un estructura tipo CsCl. Determinar la densidad iónica superficial en los planos de la forma {111} (número de iones / m^2 ; los iones pueden ser solo aniones, solo cationes o los dos tipos juntos) en función de los radios iónicos de A^+ y B^-: r_A = y r_B = m.

- $8.163\cdot 10^{18}$ iones/m^2
- $3.061\cdot 10^{18}$ iones/m^2
- $6.122\cdot 10^{18}$ iones/m^2
- $1.531\cdot 10^{18}$ iones/m^2
- $3.535\cdot 10^{18}$ iones/m^2
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:..

Sol.: la figura representa, sombreada, una porción de un plano de la forma {111}, algunos de los iones que están contenidos en él y tres celdas convencionales.



$$h=\sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}a$$

o bien:

$$h=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}a$$

Este plano está formado por la repetición de paralelogramos iguales que contienen el mismo número de átomos (figura). El área sombreada en gris contiene dos de estos paralelogramos. Cada uno de

ellos contiene 1 ión (aunque ninguno de los ángulos de las cuatro esquinas es recto, los cuatro juntos suman 360º, que corresponden a un ión completo).

Por otro lado, en la estructura tipo CsCl los iones son tangentes a lo largo de la diagonal de la celda, por lo que la arista de la celda está relacionada con los radios iónicos según:

$$a\sqrt{3} = 2\left(r_A + r_B\right)$$

Sustituyendo los valores de la base y de la altura (ver figura) del paralelogramo y el número de iones que contiene se obtiene una densidad superficial:

$$\rho_{\text{sup}} = \frac{1}{\sqrt{2}ah} = \frac{1}{\sqrt{2}a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{4\left(r_A + r_B\right)^2}$$

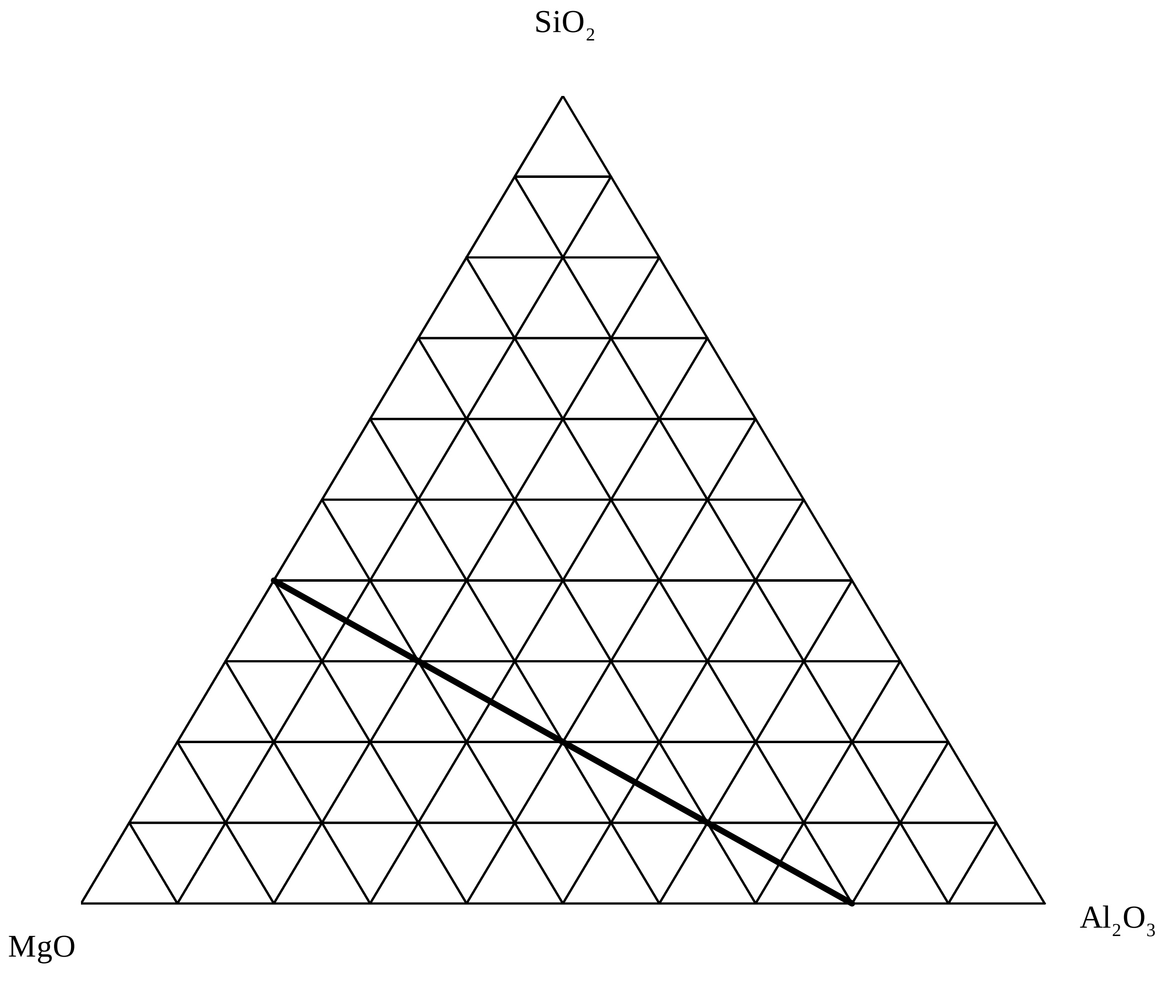
$$\rho_{\text{iónica\_sup}} = \frac{\sqrt{3}}{4\cdot\left(r_A + r_B\right)^2} \qquad \rho_{\text{iónica\_sup}} = 3.535 \times 10^{18} \ \text{iones/m}^2$$

Nótese que esta densidad iónica superficial puede referirse a aniones o a cationes, por separado, pero nunca ambos juntos, porque en la estructura del CsCl ambos tipos de iones ocupan posiciones equivalentes.

5. Una cordierita K se obtiene calcinando magnesia según: $MgCO_3 \rightarrow CO_2 \uparrow + MgO$
y una única arcilla A, de composición $aAl_2O_3 \cdot bSiO_2$ (en base seca). Se especifica que K tiene que tener una fracción másica de MgO: $X_{MgO} = 0.31$ y por cuestión de precio tiene que encontrarse sobre la línea dibujada en el diagrama ternario (en fracciones másicas). ¿Qué arcilla A es necesario utilizar? Dar la relación a / b entre los coeficientes a y b en la fórmula química de A como número decimal.

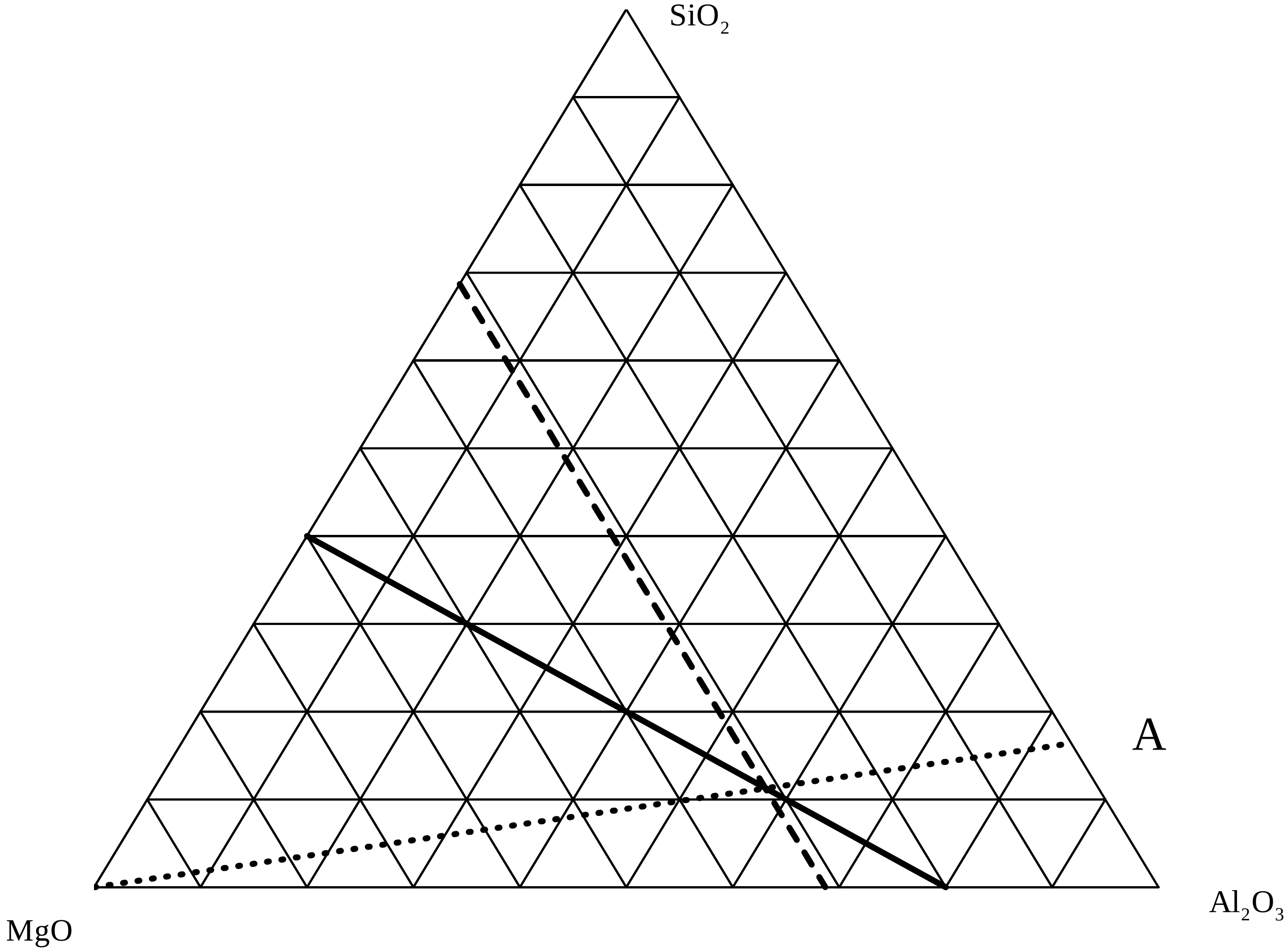
Sugerencia: utilizar un bolígrafo fino, regla y hacer las lecturas con precisión. Masas atómicas:
$Mw_C = 12$ $Mw_O = 16$ $Mw_{Mg} = 24.3$ $Mw_{Si} = 28$ $Mw_{Al} = 27$ kg/kmol

- a / b = 0.5 (que corresponde a la arcilla $Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$)
- a / b = 0.25 (que corresponde a la arcilla $Al_2O_3 \cdot 4SiO_2$)
- a / b = 1.5 (que corresponde a la arcilla $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$)
- a / b = 0.4 (que corresponde a la arcilla $2Al_2O_3 \cdot 5SiO_2$)
- a / b = 0.67 (que corresponde a la arcilla $2Al_2O_3 \cdot 3SiO_2$)
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:......................



El producto K se obtiene de la mezcla de MgO pura con una arcilla A que sólo contiene alúmina y sílice. Las mezclas de MgO y una arcilla de este tipo están sobre rectas que parten del vértice de MgO puro y terminan sobre la línea de composiciones binarias SiO_2-Al_2O_3 (línea de puntos). Además K tiene que estar sobre la recta $X_{MgO} = 0.31$ **de la primera especificación (línea de trazos), y cumplir la condición del precio, es decir, tiene que estar sobre la línea continua del enunciado. La línea de puntos a trazar tiene que pasar por la intersección de estas dos últimas. La composición (másica) de la arcilla se lee sobre el lado SiO_2-Al_2O_3:**

$X_{Al2O3} = 0.836$ $\qquad X_{SiO2} = 1 - X_{Al2O3}$ $\qquad X_{SiO2} = 0.164$



Esta composición en fracciones másicas corresponde a la calculada usando los coeficientes a y b y las masas moleculares de alúmina y sílice para una arcilla A de fórmula $aAl_2O_3 \cdot bSiO_2$:

$Mw_{Al2O3} = 102$ kg/kmol

$Mw_{SiO2} = 60$ kg/kmol

$$X_{Al2O3} = \frac{a \cdot Mw_{Al2O3}}{a \cdot Mw_{Al2O3} + b \cdot Mw_{SiO2}} \qquad X_{SiO2} = \frac{b \cdot Mw_{SiO2}}{a \cdot Mw_{Al2O3} + b \cdot Mw_{SiO2}}$$

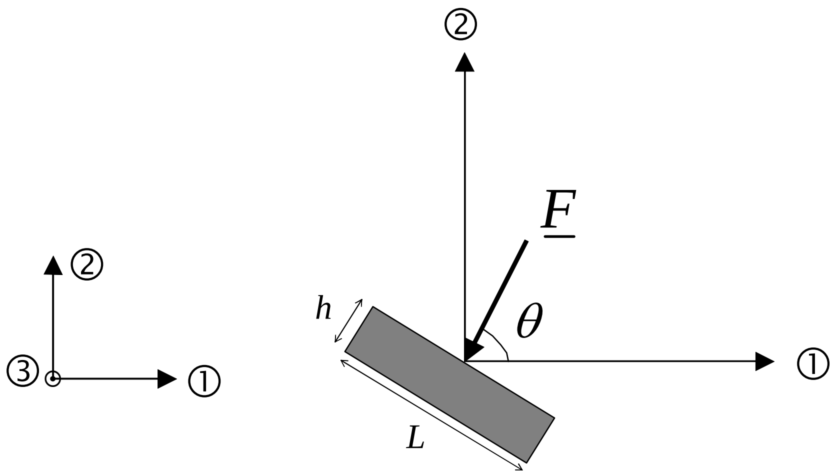
y dividiendo

$$\frac{X_{Al2O3}}{X_{SiO2}} = \frac{a \cdot Mw_{Al2O3}}{b \cdot Mw_{SiO2}} \qquad \frac{a}{b} = \frac{60}{102} \cdot \frac{X_{Al2O3}}{X_{SiO2}}$$

se obtiene una relación: $\frac{a}{b} = 3$ que corresponde a una arcilla de composición $3Al_2O_3 \cdot SiO_2$

6. Un sensor de sección cuadrada de lado $L = 0.02$ m y espesor $h = 3 \times 10^{-3}$ m está fijo sobre un plano inclinado y está sometido a una fuerza normal distribuida uniformemente sobre toda la superficie del sensor, tal y como se indica en la figura, de módulo $F = 4$ N, que forma un ángulo con el eje 1: $\theta = 30$ º. Determinar el tensor de esfuerzos (o tensor de tensiones) en el sensor (Pa), en los ejes de la figura y expresarlo en forma de matriz.

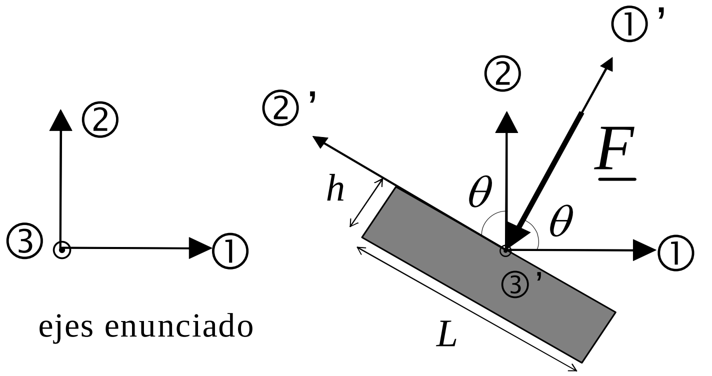
- $\begin{bmatrix} -8.66 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa
- $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -8.66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa
- $\begin{bmatrix} -3.46 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa
- $\begin{bmatrix} -7.5 & -4.33 & 0 \\ -4.33 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa
- $\begin{bmatrix} -7.5 & 4.33 & 0 \\ 4.33 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa



sensor fijo sobre un plano inclinado

- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:.....................................

Sol.: expresando el estado de tensión del sensor en unos ejes nuevos 1', 2' y 3' como los de la siguiente figura, el tensor de esfuerzos (o tensiones) es especialmente sencillo: el sensor está sometido únicamente a una tensión de compresión τ'_{11} (negativa).



El tensor de tensiones expresado en los ejes 1', 2' y 3' y en forma de matriz es:

$$\left[\!\left[\underline{\underline{\tau}}'\right]\!\right] = \begin{bmatrix} -\frac{F}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y se transforma a los ejes del enunciado utilizando la ley de transformación de tensores de 2º orden:

$$\left[\!\left[\underline{\underline{\tau}}\right]\!\right] = \underset{\sim}{L}\left[\!\left[\underline{\underline{\tau}}'\right]\!\right]\underset{\sim}{L}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{-sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ \text{-sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\!\left[\underline{\underline{\tau}}\right]\!\right] = \begin{bmatrix} \tau'_{11}\cos^2\theta & \tau'_{11}\cos\theta\,\text{sen}\theta & 0 \\ \tau'_{11}\cos\theta\,\text{sen}\theta & \tau'_{11}\,\text{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

las filas de la matriz de transformación son los vectores unitarios de las direcciones 1, 2 y 3 en función de los ejes 1', 2', 3'. El tensor de tensiones resulta:

$$\left[\!\left[\underline{\underline{\tau}}\right]\!\right] = \begin{bmatrix} -\frac{F}{L^2}\cos^2\theta & -\frac{F}{L^2}\cos\theta\,\text{sen}\theta & 0 \\ -\frac{F}{L^2}\cos\theta\,\text{sen}\theta & -\frac{F}{L^2}\text{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores:

$$\tau = \frac{-F}{L^2}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \cos(\theta)\cdot\text{sen}(\theta) & 0 \\ \cos(\theta)\cdot\text{sen}(\theta) & \text{sen}(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} -7.5\times 10^3 & -4.33\times 10^3 & 0 \\ -4.33\times 10^3 & -2.5\times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Pa}$$

7. Una cerámica PZT monocristalina es una solución sólida de titanato de plomo ($PbTiO_3$) en circonato de plomo ($PbZrO_3$) con una fracción molar de titanato $x_{PbTiO3} = 0.48$, y una estructura tipo perovskita. En la solución sólida se mantienen las dimensiones de la celda unitaria igual que en el circonato de plomo puro. Determinar la densidad (kg/m^3) de esta cerámica PZT. Datos:

$Mw_{Ti} = 47.9$ $Mw_O = 16$ $Mw_{Pb} = 207.2$ $Mw_{Zr} = 91.2$ kg/kmol

$r_{Ti} = 6.1 \times 10^{-11}$ $r_O = 1.32 \times 10^{-10}$ $r_{Pb} = 1.49 \times 10^{-10}$ $r_{Zr} = 7.5 \times 10^{-11}$

- 7470 kg/m^3
- 7190 kg/m^3
- 6406 kg/m^3
- 7619 kg/m^3
- 6938 kg/m^3
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:...

Sol.: en la solución sólida se sustituyen los cationes Zr^{4+} por cationes Ti^{4+} uno a uno, porque tienen la misma carga, sin aparecer vacantes en la estructura de la perovskita. Cada cristal tiene la fórmula estequiométrica:

$$PbTi_z Zr_{(1-z)} O_3$$

donde z es el grado de sustitución de iones circonato (fracción de iones Zr^{4+} que son sustituidos por iones Ti^{4+}), y que en este caso coincide con la fracción molar de titanato.

$$z = x_{PbTiO3}$$

El parámetro de celda en la estructura de la perovskita es: $a = 2\left(r_{Zr} + r_O\right)$ $a = 4.14 \times 10^{-10}$ m
y cada celda contiene una molécula con la fórmula anterior,

con lo que la densidad de la solución sólida se calcula:

$$\rho_{ss} = \frac{Mw_{Pb} + z \cdot Mw_{Ti} + (1 - z) \cdot Mw_{Zr} + 3 \cdot Mw_{O}}{a^3 \cdot 6.023 \cdot 10^{26}} \qquad \rho_{ss} = 7.619 \times 10^3 \quad kg/m^3$$

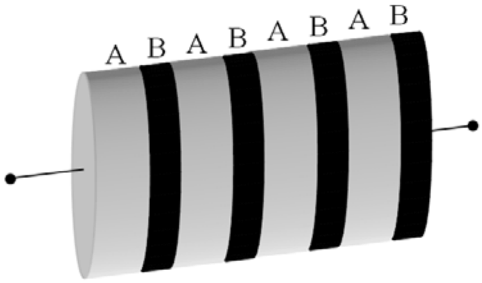
8. Para fabricar una resistencia (figura) cuya resistividad no varíe con la temperatura se combinan capas de dos materiales isótropos A y B cuyas resistividades varían linealmente con la temperatura absoluta:

$$\rho(T) = \rho_0 (1 + kT)$$

y cuyos coeficientes k son positivo para uno y negativo para el otro. Calcular cuál debe ser la relación entre los espesores h_A, h_B de las capas de A y B para conseguir que la resistividad del material compuesto en la dirección del flujo de corriente no varíe con la temperatura. El plano de las capas es perpendicular a esta dirección.
Datos:

$\rho_{A0} = 0.03$ y $\rho_{B0} = 0.22$ Ω m , $k_A = 6.66 \times 10^{-4}$ y $k_B = -6.16 \times 10^{-4}$ K^{-1}

- $h_A / h_B = 22$
- $h_A / h_B = 12.79$
- $h_A / h_B = 34.56$
- $h_A / h_B = 6.78$
- $h_A / h_B = 19.62$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: ....



Sol.: los dos componentes están en serie, por lo que la resistividad del compuesto en la dirección del flujo de corriente se obtiene de la regla de mezcla lineal.

$$\rho_C(T) = V_A \rho_{A0} (1 + k_A T) + (1 - V_A) \rho_{B0} (1 + k_B T)$$

de donde se ve que la resistividad del compuesto dependen linealmente de T. Para que la resistencia no dependa de la temperatura, el coeficiente que multiplica a T debe ser nulo:

$$V_A \rho_{A0} k_A + (1 - V_A) \rho_{B0} k_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{-\rho_{B0} k_B}{\rho_{A0} k_A - \rho_{B0} k_B}$$

de donde:

$$V_A = \frac{-\rho_{B0} \cdot k_B}{\rho_{A0} \cdot k_A - \rho_{B0} \cdot k_B} \qquad V_A = 0.872$$

La relación de espesores es igual a la relación de fracciones volumétricas de los componentes:

$$\frac{V_A}{1 - V_A} = 6.783$$

Problema 1

Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

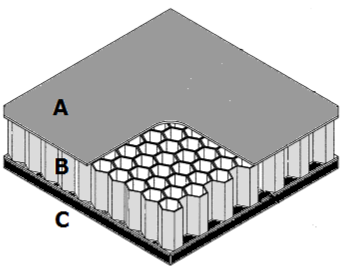
Un material compuesto **M** utilizado en la industria aeronáutica presenta la estructura tipo sandwich que se indica en la figura. Está formado por una lámina exterior de un material **A**, con espesor $\delta_A = 1 \cdot 10^{-3} m$, una lámina central **B** de espesor $\delta_B = 5 \cdot 10^{-3} m$ y con estructura de panel de abeja (*honeycomb*) y otra lámina exterior de un material **C** con espesor $\delta_C = 2 \cdot 10^{-3} m$. La lámina **B** está formada a su vez por dos materiales: **D** que forma la estructura regular del panal y **E** que constituye el material de relleno, siendo la fracción másica $X_D^B = 0.25$. Los materiales **A**, **C**, **D** y **E** por separado y sin darles ninguna estructura, son homogéneos e isótropos.

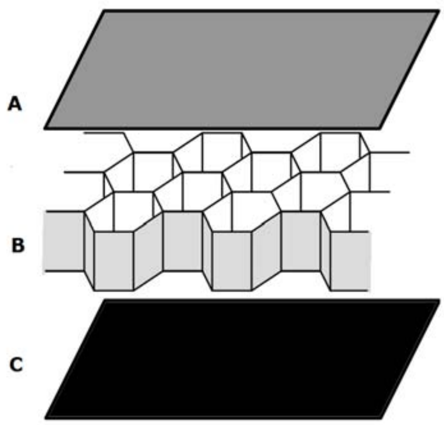
1. Indicar **razonadamente** la clase cristalográfica del material compuesto **M**, señalando sobre alguna de las figuras las direcciones de los ejes convencionales.
2. Calcular la densidad volumétrica (kg/m^3) y la densidad superficial (kg/m^2) del material compuesto **M**.
3. Determinar la capacidad calorífica a presión constante $(J/kg\ K)$ para el material compuesto **M**
4. Calcular la conductividad térmica del material $(W/m\ K)$ en la dirección perpendicular al plano de las láminas
5. Del material compuesto anterior **M**, se talla un cilindro de $R = 5 \cdot 10^{-2}\ m$ de manera que su eje coincida con la dirección perpendicular al plano de las láminas. Suponiendo que solo existe gradiente de temperatura en la dirección del eje del cilindro, determinar la cantidad de energía que fluye en la unidad de tiempo a través del cilindro anterior, cuando las temperaturas entre las bases del cilindro son 373 K y 393 K. Suponer estado estacionario.

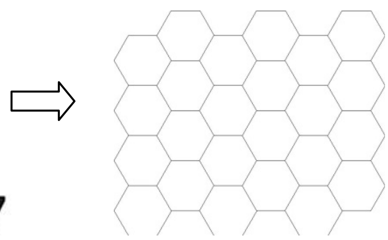
Datos: *densidades*: $\rho_A = 1700\, kg/m^3$; $\rho_C = 1050\, kg/m^3$; $\rho_D = 1000\, kg/m^3$; $\rho_E = 120\, kg/m^3$.

Capacidad calorífica a presión constante:
$Cp_A = 710\, J/kg\ K$; $Cp_C = 1880\, J/kg\ K$; $Cp_D = 1200\, J/kg\ K$; $Cp_E = 710\, J/kg\ K$;

Conductividad térmica: $k_A = 120\, W/m\ K$; $k_C = 0.163\, W/m\ K$; $k_D = 0.13\, W/m\ K$; $k_E = 0.036\, W/m\ K$;





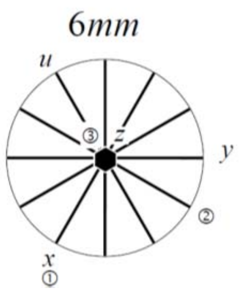


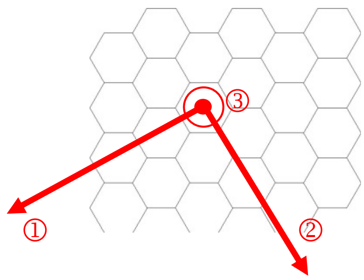
(3 puntos, 45 minutos)

Sol:

1. **Indicar razonadamente la clase cristalográfica del material compuesto M, señalando sobre alguna de las figuras las direcciones de los ejes convencionales.**

   El material presenta un eje de rotación senario perpendicular al plano de las láminas, característico del sistema hexagonal. No hay centro de inversión, pero el material presenta 6 planos de simetría que contienen al eje de rotación. Clase *6mm*. El eje ③ se sitúa paralelo al eje senario, mientras que los ejes ① y ② son perpendiculares al anterior y entre sí (ver estereograma).





2. **Calcular la densidad volumétrica (kg/m³) y la densidad superficial (kg/m²) del material compuesto M.**

   A partir de las fracciones volumétricas

$$V_A = \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B + \delta_C} = 0.125$$

$$V_B = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B + \delta_C} = 0.625$$

$$V_C = \frac{\delta_C}{\delta_A + \delta_B + \delta_C} = 0.250$$

se puede determinar la densidad volumétrica del material compuesto M:

$$\rho_M = V_A\rho_A + V_B\rho_B + V_C\rho_C$$

una vez conocida la densidad de B, que es a su vez, un material compuesto por D y E:

$$\frac{1}{\rho_B} = \frac{X_D^B}{\rho_D} + \frac{X_E^B}{\rho_E} = \frac{0.25}{1000} + \frac{0.75}{120} \Rightarrow \rho_B = 153.85\, kg/m^3$$

Por lo tanto, la densidad pedida es:

$$\rho_M = V_A\rho_A + V_B\rho_B + V_C\rho_C = 571.16\, kg/m^3$$

Y la densidad superficial: $571.16 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 4.57\, kg/m^2$

3. **Determinar la capacidad calorífica a presión constante (J/(kg K)) para el material compuesto M**

$$Cp_M = X_A Cp_A + X_B Cp_B + X_C Cp_C$$

siendo X_A, X_B y X_C las fracciones másicas:

$$X_A = \frac{V_A\rho_A}{V_A\rho_A + V_B\rho_B + V_C\rho_C} = 0.372$$

$$X_B = \frac{V_B\rho_B}{V_A\rho_A + V_B\rho_B + V_C\rho_C} = 0.168$$

$$X_C = \frac{V_C\rho_C}{V_A\rho_A + V_B\rho_B + V_C\rho_C} = 0.460$$

y la capacidad calorífica del material B

$$Cp_B = X_D^B Cp_D + X_E^B Cp_E = 0.25 \cdot 1200 + 0.75 \cdot 710 = 832.5\ J/kg\ K$$

Por lo tanto, sustituyendo simplemente

$$Cp_M = X_A Cp_A + X_B Cp_B + X_C Cp_C = 1268.78\ J/kg\ K$$

4. Calcular la conductividad térmica del material (W/(m K)) en la dirección perpendicular al plano de las láminas

Para obtener la conductividad térmica en la dirección del eje ③, teniendo en cuenta que los materiales A, B y C se encuentran en serie se utiliza la regla de Reuss:

$$\frac{1}{k_M} = \frac{V_A}{k_A} + \frac{V_B}{k_B} + \frac{V_C}{k_C}$$

Por otra parte, es necesario homogeneizar el material B para obtener el valor de su conductividad térmica. A lo largo de la dirección del eje ③, los materiales D y E se encuentran en paralelo, por lo que

$$k_B = V_D^B k_D + V_E^B k_E \ \textbf{ siendo } V_D^B = \frac{\frac{x_D^B}{\rho_D}}{\frac{x_D^B}{\rho_D} + \frac{x_E^B}{\rho_E}} = 3.85 \cdot 10^{-2}\ \ y\ V_E^B = \frac{\frac{x_E^B}{\rho_E}}{\frac{x_D^B}{\rho_D} + \frac{x_E^B}{\rho_E}} = 0.962$$

$$k_B = V_D^B k_D + V_E^B k_E = 3.96 \cdot 10^{-2}\ \ W/mK$$

Y por lo tanto, la conductividad pedida:

$$\frac{1}{k_M} = \frac{V_A}{k_A} + \frac{V_B}{k_B} + \frac{V_C}{k_C} = \frac{0.125}{120} + \frac{0.625}{3.96 \cdot 10^{-2}} + \frac{0.250}{0.163} \Rightarrow k_M = 5.77 \cdot 10^{-2}\ \ W/mK$$

5. Del material compuesto anterior M, se talla un cilindro de $R = 5 \cdot 10^{-2}\ m$ de manera que su eje coincida con la dirección perpendicular al plano de las láminas. Suponiendo que solo existe gradiente de temperatura en la dirección del eje del cilindro, determinar la cantidad de energía que fluye en la unidad de tiempo a través del cilindro anterior, cuando las temperaturas entre las bases del cilindro son 373 K y 393 K. Suponer estado estacionario.

En estado estacionario, la potencia pedida W es:

$$W = k_M \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{\delta_A + \delta_B + \delta_C} \pi R^2 = 1.13W$$

<u>Problema 2</u>

Nombre y apellidos: **Número de matrícula:**

Se desea construir un actuador piezoeléctrico para generar ultrasonidos. Se dispone de un material cerámico cuyos módulos piezoeléctricos (C/N), referidos a los ejes cartesianos convencionales del material, son:

$$d_{222} > 0 \quad , \qquad d_{211} = -d_{222} \quad , \qquad d_{112} = d_{121} = -d_{222}$$

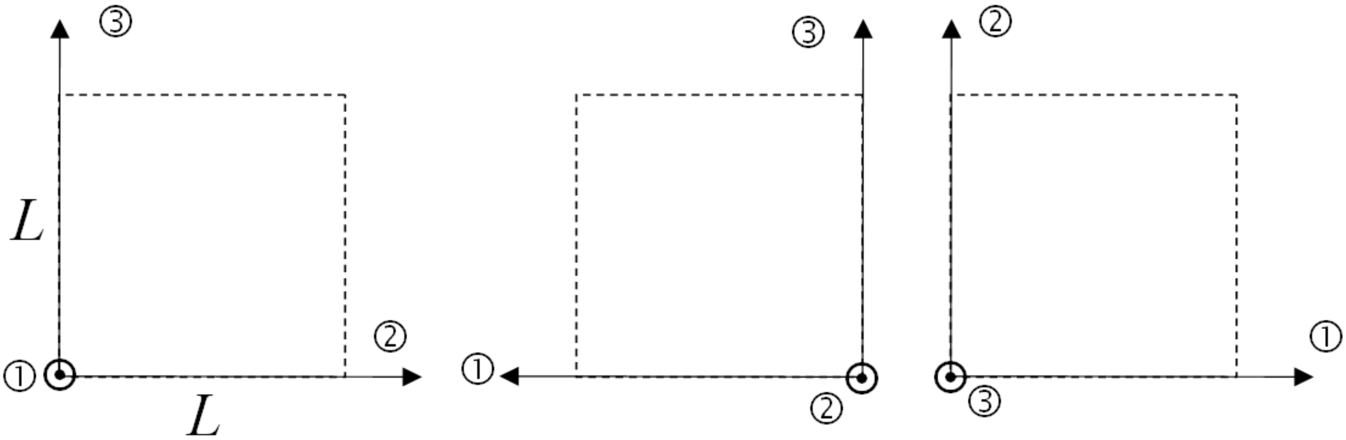
y el resto de los módulos son nulos.

A partir de un monocristal eumórfico de dicho material cerámico, se talla una muestra con forma de cubo de lado L (m), cuyas aristas están alineadas con los ejes convencionales del material. Esta muestra cúbica se somete a un campo eléctrico $\underline{E}$ de componentes E_1 , E_2 y E_3 (V/m) conocidas, <u>todas positivas y distintas de 0</u>, referidas a los ejes convencionales del material, y con $E_2 > E_1$.

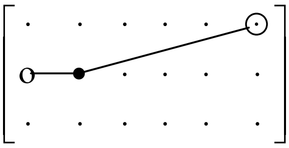
Se pretende determinar cómo se deforma esta muestra con forma de cubo debido a la aplicación del campo eléctrico; en todas las preguntas siguientes los resultados tienen que expresarse en función de las componentes de $\underline{E}$, de los módulos piezoeléctricos del material dados en el enunciado (es decir, en notación tensorial con <u>3 subíndices</u>) y de las demás variables que se consideren necesarias:

1. escribir el tensor deformación en forma de matriz, con el valor de todas sus componentes ε_{ij} claramente expresado,
2. determinar las variaciones longitudinales (m) de las aristas del cubo en las tres direcciones de los ejes convencionales (ΔL_1, ΔL_2 y ΔL_3),
3. determinar todas las variaciones angulares (radianes) que se producen en el cubo,
4. representar <u>todas las variaciones longitudinales y angulares</u> obtenidas en los puntos 2 y 3 sobre las figuras de más abajo, es decir, dibujar la forma final de cada cara del cubo,
5. calcular las variaciones relativas de área ($\frac{\Delta A}{A}$) de las caras del cubo situadas: en el plano 1-2, en el plano 1-3 y en el plano 2-3,
6. calcular la variación relativa de volumen de la muestra del material ($\frac{\Delta V}{V}$).

Nota: considerar siempre pequeña deformación. **(45 minutos, 3 puntos)**



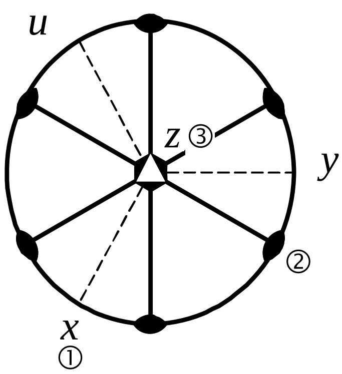
Sol.: a la vista de los módulos piezoeléctricos, el material es de la clase: $\bar{6}m2$
y le corresponde la estructura de la matriz de módulos piezoeléctricos:

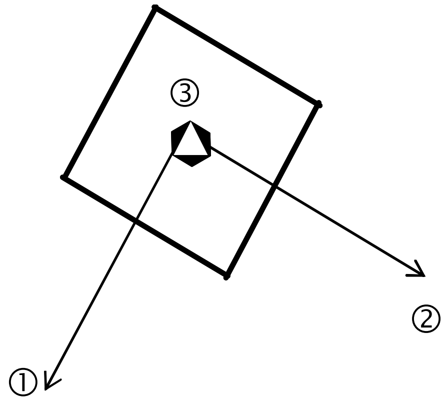


o bien:

$$\underset{\sim}{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Del monocristal se prepara (se "talla") un cubo (dibujo de la derecha) con las aristas paralelas a los ejes convencionales indicados en el estereograma.





1. Ante un campo eléctrico externo el cubo de material se deforma; aplicando la ley de la piezoelectricidad inversa en notación de Voigt:

$$\vec{\varepsilon}^T = [\![\underline{E}]\!]^T \underset{\sim}{d}$$

resulta:

$$\vec{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_2 d_{22} & E_2 d_{22} & 0 & 0 & 0 & -2E_1 d_{22} \end{bmatrix}$$

que en notación tensorial, y escrito en forma de matriz, es el siguiente tensor deformación:

$$[\![\underline{\varepsilon}]\!] = \begin{pmatrix} -E_2 d_{222} & -E_1 d_{222} & 0 \\ -E_1 d_{222} & E_2 d_{222} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Según el enunciado: $E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad d_{222} > 0$

- en la dirección 1 convencional, la arista del cubo sufre un acortamiento: $\Delta L_1 = L\varepsilon_{11} = -LE_2 d_{222}$

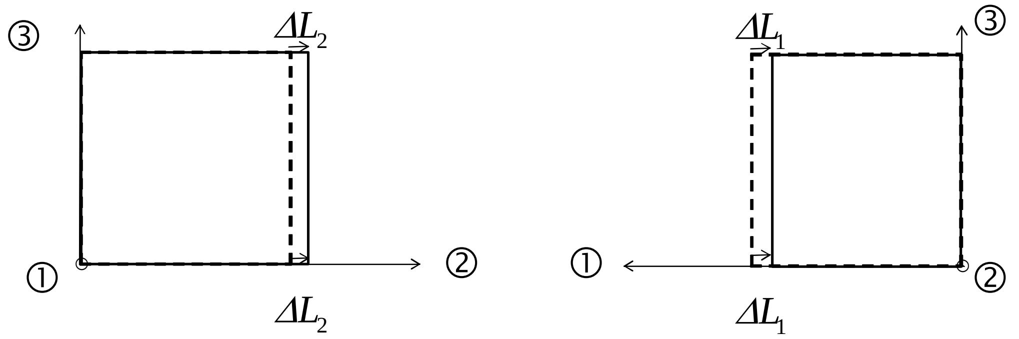
- en la dirección 2 convencional, la arista del cubo sufre un alargamiento, idéntico en magnitud al acortamiento en dirección 1: $\Delta L_2 = L\varepsilon_{22} = LE_2 d_{222}$

- y en la dirección convencional 3, la arista del cubo no cambia de longitud: $\Delta L_3 = L\varepsilon_{33} = 0$

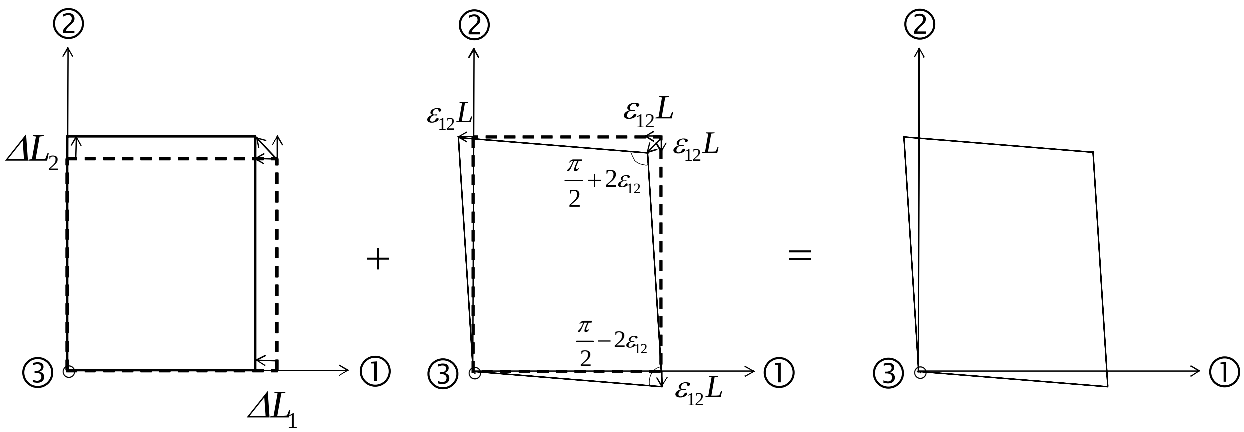
3. En el plano 1-2 hay una deformación angular, en radianes, de: $2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 = -2E_1 d_{222}$
es decir, los ángulos rectos de los vértices disminuyen unos y aumentan otros en esta cantidad, resultando un paralelogramo con ángulos de: $\frac{\pi}{2} \mp 2E_1 d_{222}$

y en los otros planos no hay deformación angular: $2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{23} = 0$

4. Para representar en un esquema cómo se deforma el cubo, se utilizan las figuras del enunciado. En planos 2-3 y 1-3 no hay deformaciones angulares y además la longitud de la arista en dirección 3 queda constante; el cubo original es el de línea discontinua, y el rectángulo después de la deformación se dibuja con línea continua.



En el plano 1-2 se puede realizar la deformación en dos pasos, primero sólo las deformaciones longitudinales y segundo sólo la deformación angular; la figura de partida (antes de la deformación) en cada paso se representa con línea de trazos y la figura resultante tras la deformación se dibuja con línea continua:



sólo deformaciones longitudinales (se mantienen los ángulos rectos)

sólo deformación angular a partir del rectángulo anterior (se mantiene la longitud de los lados)

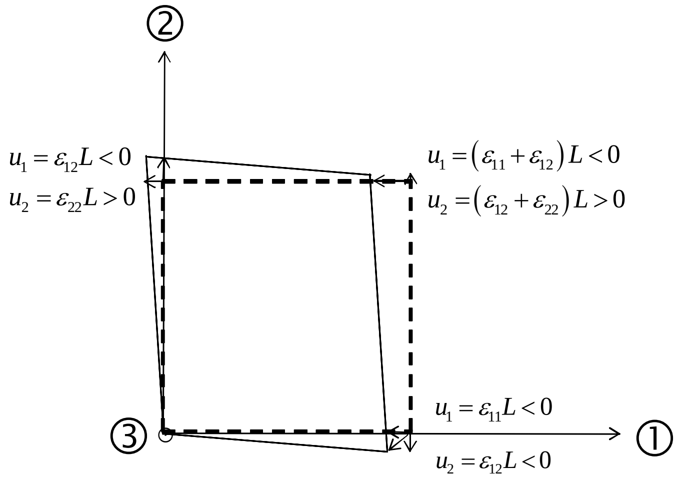
deformación total

Considerando sólo las deformaciones longitudinales en el plano 1-2, se observa que la base del cubo pasa de ser un cuadrado a ser un rectángulo: cambian las longitudes de las aristas, pero se mantienen los ángulos rectos. Partiendo de este rectángulo, la deformación angular (negativa para el primer cuadrante, con coordenadas 1 y 2 positivas) produce una variación de los ángulos rectos,

pero sin cambio de la longitud de los lados, resultando finalmente un paralelogramo.

También se puede hacer directamente, con las coordenadas de cada punto y aplicando:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 \\ \varepsilon_{12}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 \end{bmatrix}$$



en el enunciado se dice que $E_2 > E_1$ así que el módulo de ε_{12}, que es negativo, es menor que ε_{22}, que es positivo.

5. La variación relativa del área de la cara del cubo situada en el plano 1-2 será:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{L(1+\varepsilon_{11})L(1+\varepsilon_{22}) - L^2}{L^2} = 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - 1$$

y para pequeña deformación:

$$\frac{\Delta A}{A} \cong \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = -E_2 d_{222} + E_2 d_{222} = 0$$

no hay variación de área de la cara del plano 1-2

De forma análoga se obtienen las variaciones relativas de área de las caras del cubo

en el plano 2-3: $$\frac{\Delta A}{A} \cong \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = E_2 d_{222}$$ **la variación relativa de área de la cara del plano 2-3 es positiva, como se comprueba en la figura correspondiente a este plano,**

y en el plano 1-3: $$\frac{\Delta A}{A} \cong \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} = -E_2 d_{222}$$ **la variación relativa de área de la cara del plano 1-3 es negativa, como también se ve en su figura.**

6. La variación relativa de volumen de material se calcula: $\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$