Nombre: **Número de matrícula:**

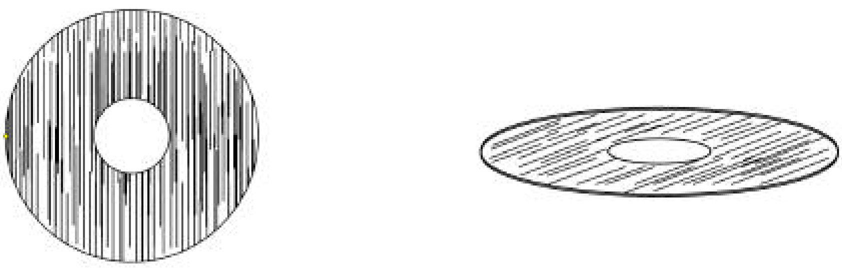
- **sólo una respuesta es correcta**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos**
- **usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos**
- **60 min, 0.5 puntos cada problema**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.

---

1. Un disco de freno está fabricado de un material compuesto de una matriz cerámica (A), policristalina, isotrópica, y de fibras (B) de carbono orientadas paralelamente entre sí, y paralelas a las caras del disco, como se indica en la figura. Las dimensiones del disco a temperatura ambiente son $Ri = 0.13$ m y $Re = 0.23$ m ; y todas las componentes del coeficiente de dilatación térmica expresado en los ejes convencionales del material son conocidas: $a_{11} = 7.1 \times 10^{-4}$ K^{-1}, $a_{22} = 7.1 \times 10^{-4}$ K^{-1} y $a_{33} = 4.4 \times 10^{-4}$ K^{-1}. Durante una frenada el disco sufre un calentamiento $DT = 250$ K respecto a la temperatura ambiente. La deformación causada por la dilatación del material compuesto obedece a la ley:

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{a}}\ \Delta T$$



Determinar cuál es la variación relativa (incremento de radio dividido por radio inicial), debida al calentamiento, del radio del taladro interior medido en la dirección de las fibras.

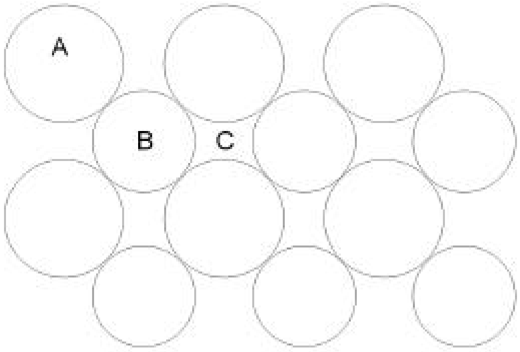
Sol.: el material es de la clase límite $\frac{¥}{mm}$ y la dirección de las fibras es la dirección convencional 3. La variación relativa del radio interior en esa dirección es por tanto:

$$\frac{\Delta R_i}{R_i} = \Delta T\, a_{33} \qquad DT \cdot a_{33} = 0.11$$

- 0.030
- 0.034
- 0.110
- 0.046

- 0.0036
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

2. Un tirante de material compuesto está fabricado con dos tipos de fibras A y B, cuyos módulos elásticos y radios son $E_A = 4.05$ GPa y $E_B = 0.4$ GPa, y $R_A = 1.05$ mm y $R_B = 0.9$ mm, respectivamente, y una matriz C de módulo elástico $E_C = 0.027$ GPa. Las fibras de A y de B son todas paralelas entre sí, y los centros de las secciones transversales de las fibras de A están situados sobre una red cuadrada, como se indica en un detalle de la sección del tirante (figura siguiente). Determinar el módulo elástico del tirante en la dirección de las fibras.



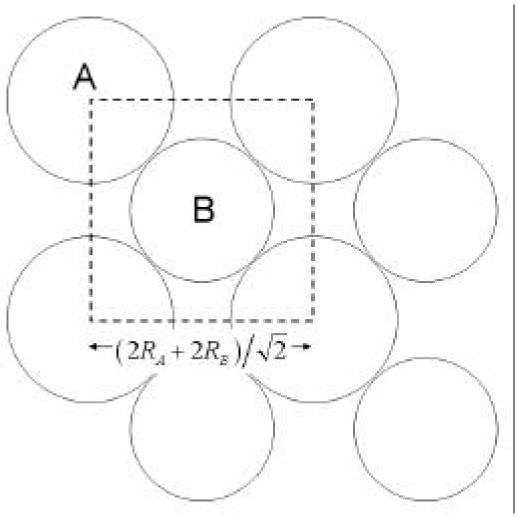
Sol.: el módulo en la dirección de las fibras corresponde a isodeformación, y se calcula con la regla de mezcla de Voigt. Las fracciones volumétrica están dadas por:

$$V_A = \frac{p \cdot R_A^2}{\left(\frac{2R_A + 2R_B}{\sqrt{2}}\right)^2} \qquad V_B = \frac{p \cdot R_B^2}{\left(\frac{2R_A + 2R_B}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$V_C = 1 - V_A - V_B$$

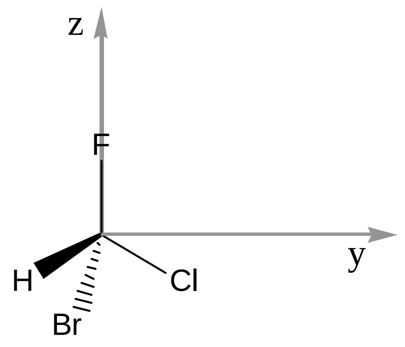
$$V_A = 0.454 \qquad V_B = 0.336 \qquad V_C = 0.21$$

$$E_c = V_A \cdot E_A + V_B \cdot E_B + V_C \cdot E_C \qquad E_c = 1.978 \text{ GPa}$$



- 0.766 GPa
- 4.266 GPa
- 1.978 GPa
- 0.673 GPa
- 2.546 GPa
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

3. Un cristal está formado por una red cúbica P y la base es una molécula tetraédrica, con cuatro sustituyentes como se indica en la figura. Las líneas continuas indican átomos que están en el mismo plano. Determinar a qué clase cristalográfica pertenece el cristal.



Sol.: debido a la asimetría de la base, el cristal sólo tiene ejes de orden 1, y es triclínico. No tiene centro de inversión, por tanto pertenece a la clase 1.

- $\bar{4}3m$
- $3m$
- m
- 1
- 3
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:

4. Los planos de deslizamiento (donde sufre deformación plástica un cristal con más facilidad) de la estructura BCC son los de la forma {110}. Determinar la densidad superficial de átomos en los planos de esa forma para un material de estructura cristalina BCC cuyos átomos tienen un radio de $r = 1.44 \times 10^{-10}$ m.

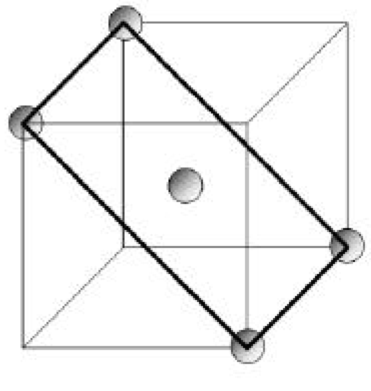
- $1.455 \cdot 10^{19}$ átomos/m^2
- $1.279 \cdot 10^{19}$ átomos/m^2
- $1.644 \cdot 10^{19}$ átomos/m^2
- $8.96 \cdot 10^{18}$ átomos/m^2
- $1.049 \cdot 10^{19}$ átomos/m^2
- ninguna de los anteriores, la respuesta correcta es:

Sol: en una estructura BCC, la arista del cubo está relacionada con el radio atómico (p. 47 del texto) por:

$$a = \frac{4r}{\sqrt{3}} \qquad a = 3.326 \times 10^{-10} \text{ m}$$

En la figura se representa uno de los planos de la forma dada con los átomos que contiene. La densidad superficial es

$$r = \frac{1 + 4 \cdot \frac{1}{4}}{a \cdot \sqrt{2}a} \qquad r = 1.279 \times 10^{19} \text{ átomos/m}^2$$



---

5. La difusividad a través de la piel (considerada isótropa) de un medicamento que se aplica como un parche en la piel es $D = 4.8\times 10^{-9}$ m^2/s. Los capilares sanguíneos más superficiales se encuentran a una profundidad de $x = 2.5\times 10^{-4}$ m. ¿Cuánto tiempo hay que esperar para que la concentración del medicamento a la profundidad de estos capilares alcance un valor que sea tres cuartas partes del valor de la concentración en la superfice?.

- 4750 s
- 1620 s
- 64 s
- 550 s
- 134 s
- ninguna de las respuestas anteriores, la respuesta correcta es:

Sol.: de los datos se deduce que $\frac{Cs - 0.75Cs}{Cs} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{D\cdot t}}\right)$

de donde se despeja el tiempo: $t = 64.12$ **segundos**

---

6. En un láser de tres niveles, el bombeo se realiza con fotones de frecuencia $n_b = 2.7 \times 10^{14}$ Hz y la transición rápida (en la cuál no se emite radiación) ocurre entre niveles cuya diferencia de energía es de $DE = 0.06$ eV. ¿A qué longitud de onda emite el láser?

- $2.386 \cdot 10^{-6}$ m
- $3.08 \cdot 10^{-7}$ m
- $6.99 \cdot 10^{-7}$ m
- $1.17 \cdot 10^{-6}$ m
- $9.81 \cdot 10^{-7}$ m
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:

Sol: la longitud de onda a la que emite el láser es la correspondiente a la diferencia de energía entre el nivel de bombeo y DE, por tanto:

$$l = \frac{h \cdot c}{h \cdot n_b - 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot DE} \qquad l = \frac{c}{n_b - \dfrac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot DE}{h}} \qquad l = 1.174 \times 10^{-6} \text{ m}$$

---

7. Un PE semicristalino tiene una densidad de $r = 865$ kg/m^3. Se sabe que el PE cristaliza en el sistema ortorrómbico siendo los parámetros de red de la celdilla unidad que contiene dos UER los siguientes: $a = 0.742$ nm, $b = 0.493$ nm y $c = 0.253$ nm. Si la densidad del PE totalmente amorfo es $r_a = 862$ kg/m^3, determina el grado de cristalinidad de este PE semicristalino (el grado de cristalinidad se define como la fracción volumétrica de la fase cristalina).

- 0.204
- 0.288
- 0.913
- 0.021
- 0.688
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:

Sol.: la UER tiene una masa molecular de $Mw_{UER} = 2 \cdot 12 + 4 \cdot 1$

Si la cristalinidad fuera el 100%, la densidad del PE sería:

$$r_c = \frac{2Mw_{UER} \cdot 1.660 \cdot 10^{-27}}{a \cdot b \cdot c \cdot 10^{-27}} \qquad r_c = 1004.4 \text{ kg/m}^3$$

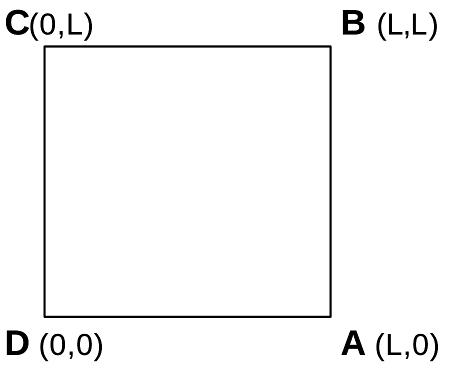
La densidad del PE semicristalino está dado por: $r = V_a \cdot r_a + V_c \cdot r_c = (1 - V_c) \cdot r_a + V_c \cdot r_c$

de donde: $V_c = \dfrac{r_a - r}{r_a - r_c}$ $\qquad V_c = 0.021$

---

8. Determina las componentes (en dos dimensiones, 2D) del tensor deformación para los siguientes desplazamientos ($\underline{u}$) de los puntos A, B, C y D de la estructura de la figura y para el lado $L = 0.32$ m.

$$\underline{u}_A = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.002 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_B = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.002 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_C = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



- $[\![e]\!] = \begin{bmatrix} 6.711\times10^{-5} & 1.007\times10^{-4} \\ 1.007\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$
- $[\![e]\!] = \begin{bmatrix} 3.125\times10^{-3} & 4.688\times10^{-3} \\ 4.688\times10^{-3} & 0 \end{bmatrix}$
- $[\![e]\!] = \begin{bmatrix} 4.739\times10^{-4} & 7.109\times10^{-4} \\ 7.109\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$
- $[\![e]\!] = \begin{bmatrix} 1.316\times10^{-3} & 1.974\times10^{-3} \\ 1.974\times10^{-3} & 0 \end{bmatrix}$
- $[\![e]\!] = \begin{bmatrix} 1.577\times10^{-4} & 2.366\times10^{-4} \\ 2.366\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$
- ninguna de las anteriores. La solución correcta es:

Sol.: a partir de la definición del tensor de deformación, e integrando, resulta:

$$[\![\underline{\underline{e}}]\!] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$u_1(x_1, x_2) = e_{11}x_1 + Cx_2 + e_{12}x_2 + K$$
$$u_2(x_1, x_2) = e_{22}x_2 - Cx_1 + e_{12}x_1 + K'$$

Las constantes de integración K y K' son cero porque el desplazamiento del punto D es cero. Sustituyendo los desplazamientos de los puntos B y C en la expresión anterior, se obtiene:

$$u_{B_1}(x_{B_1}, x_{B_2}) = e_{11}L + CL + e_{12}L$$
$$u_{B_2}(x_{B_1}, x_{B_2}) = e_{22}L - CL + e_{12}L$$
$$u_{C_1}(x_{C_1}, x_{C_2}) = CL + e_{12}L$$
$$u_{C_2}(x_{C_1}, x_{C_2}) = e_{22}L$$

de donde: $e_{11} = \dfrac{0.001}{L}$ $\qquad e_{12} = \dfrac{0.003}{2L}$ $\qquad e_{22} = 0$

$e_{11} = 3.125 \times 10^{-3}$ $\qquad e_{12} = 4.688 \times 10^{-3}$ $\qquad e_{22} = 0$

<u>Problema 1</u> **Nombre:** **Número de matrícula:**

Las fibras modacrílicas son fibras acrílicas modificadas en las que el acrilonitrilo (A) se asocia con otros monómeros con el objeto de mejorar las propiedades del material polimérico, especialmente su resistencia a la combustión. Entre los monómeros que se suelen emplear se encuentra el cloruro de vinilo (B) y el cloruro de vinilideno (V, ver fórmula abajo).
Se desea preparar un terpolímero (D) formado por unidades de acrilonitrilo, cloruro de vinilo y cloruro de vinilideno, que cumpla las siguientes especificaciones:

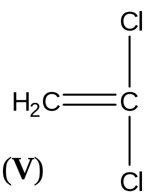
- su arquitectura molecular debe presentar $S_1 = 15$ residuos de acrilonitrilo por cada 100 átomos de carbono de la cadena principal,
- su porcentaje (% en masa) de cloro debe ser del $S_2 = 56.64$ %.

El terpolímero D se puede obtener por mezcla de los copolímeros siguientes:

- un copolímero E de acrilonitrilo-cloruro de vinilo, con una fracción másica de acrilonitrilo de $S_3 = 59$ %
- un copolímero F de acrilonitrilo-cloruro de vinilideno.

Determinar
1. la composición molar del terpolímero D (en fracciones molares de A, B y V)
2. las cantidades necesarias (en kg) de E y F para obtener 100 kg de D.
3. la composición molar del copolímero F (en fracciones molares de A y V)

(3 puntos, 45 minutos)



(V)

Sol.: usamos como base de cálculo 1 kg de terpolímero D; las fracciones molares se representan con mayúsculas (X_i), las fracciones másicas con minúsculas (x_i).

Las masas moleculares de los residuos monoméricos de A, B y V son:

$Mw_H = 1 \qquad Mw_C = 12 \qquad Mw_N = 14 \qquad Mw_{Cl} = 35.5$

$Mw_A = 3 \cdot Mw_C + 3 \cdot Mw_H + 1 \cdot Mw_N \qquad Mw_A = 53$ kg/kmol

$Mw_B = 2 \cdot Mw_C + 3 \cdot Mw_H + 1 \cdot Mw_{Cl} \qquad Mw_B = 62.5$ kg/kmol

$Mw_V = 2 \cdot Mw_C + 2 \cdot Mw_H + 2 Mw_{Cl} \qquad Mw_V = 97$ kg/kmol

La primera especificación implica:

$$2S_1 = \frac{\dfrac{xD_A}{Mw_A}}{\dfrac{xD_A}{Mw_A} + \dfrac{xD_B}{Mw_B} + \dfrac{1 - xD_A - xD_B}{Mw_V}} \cdot 100$$

(número de residuos de A por cada 100 átomos de C en la cadena principal, es decir por cada 50 residuos monoméricos de la cadena principal)

La segunda especificación implica:

$$S_2 = \left[xD_B \cdot 1 \cdot \frac{Mw_{Cl}}{Mw_B} + (1 - xD_A - xD_B) \cdot 2 \cdot \frac{Mw_{Cl}}{Mw_V} \right] \cdot 100$$

Despejando de estas dos especificaciones (que son dos ecuaciones lineales en xD_A y xD_B) se obtiene la composición másica de D:

$xD_A = 0.201 \qquad xD_B = 0.111 \qquad xD_V = 1 - xD_A - xD_B \qquad xD_V = 0.688$

Por tanto la composición molar de D es:

$$XD_A = \frac{\frac{xD_A}{Mw_A}}{\frac{xD_A}{Mw_A} + \frac{xD_B}{Mw_B} + \frac{xD_V}{Mw_V}} \qquad XD_B = \frac{\frac{xD_B}{Mw_B}}{\frac{xD_A}{Mw_A} + \frac{xD_B}{Mw_B} + \frac{xD_V}{Mw_V}} \qquad XD_V = 1 - XD_A - XD_B$$

$XD_A = 0.3$ $\qquad XD_B = 0.14$ $\qquad XD_V = 0.56$

La composición de E es: $\quad xE_A = \frac{S_3}{100} \qquad xE_B = 1 - xE_A \qquad xE_V = 0$

La cantidad de F necesaria para obtener 1 kg de D, y la composición de F se pueden obtener de las dos condiciones (balance de A y de V en la mezcla de E y F):

$$(1 - F) \cdot xE_A + F \cdot xF_A = xD_A$$

$$F \cdot (1 - xF_A) = xD_V$$

$F = 0.73 \qquad xF_A = 0.057 \qquad xF_V = 1 - xF_A \qquad xF_V = 0.943$

Por tanto, para obtener 100 kg de D son necesarios:

$100 \cdot (1 - F) = 27.04$ kg de E $\qquad 100F = 72.96$ kg de F

y la composición molar del copolímero F es:

$$XF_A = \frac{\frac{xF_A}{Mw_A}}{\frac{xF_A}{Mw_A} + \frac{xF_V}{Mw_V}} \qquad XF_B = 0 \qquad XF_V = 1 - XF_A - XF_B$$

$XF_A = 0.1 \qquad XF_B = 0 \qquad XF_V = 0.9$

Extremo de la línea (especificación S_1) sobre el lado AB

$$f(xD_A) = \frac{\dfrac{xD_A}{Mw_A}}{\dfrac{xD_A}{Mw_A} + \dfrac{1 - xD_A}{Mw_B}} \cdot 100 - 2S_1$$

$x = 0.2$ $\quad xQ_A = root(f(x), x)$ $\quad xQ_A = 0.267$ $\quad xQ_B = 1 - xQ_A$ $\quad xQ_B = 0.733$ $\quad xQ_V = 0$

Extremo de la línea (especificación S_1) sobre el lado AV

$$f(xD_A) = \frac{\dfrac{xD_A}{Mw_A}}{\dfrac{xD_A}{Mw_A} + \dfrac{1 - xD_A}{Mw_V}} \cdot 100 - 2S_1$$

$x = 0.2$ $\quad xR_A = root(f(x), x)$ $\quad xR_A = 0.19$ $\quad xR_B = 0$ $\quad xR_V = 1 - xR_A$ $\quad xR_V = 0.81$

Extremo de la línea (especificación S_2) sobre el lado AB

$$f(xD_A) = \left[(1 - xD_A) \cdot 1 \cdot \frac{Mw_{Cl}}{Mw_B}\right] \cdot 100 - S_2$$

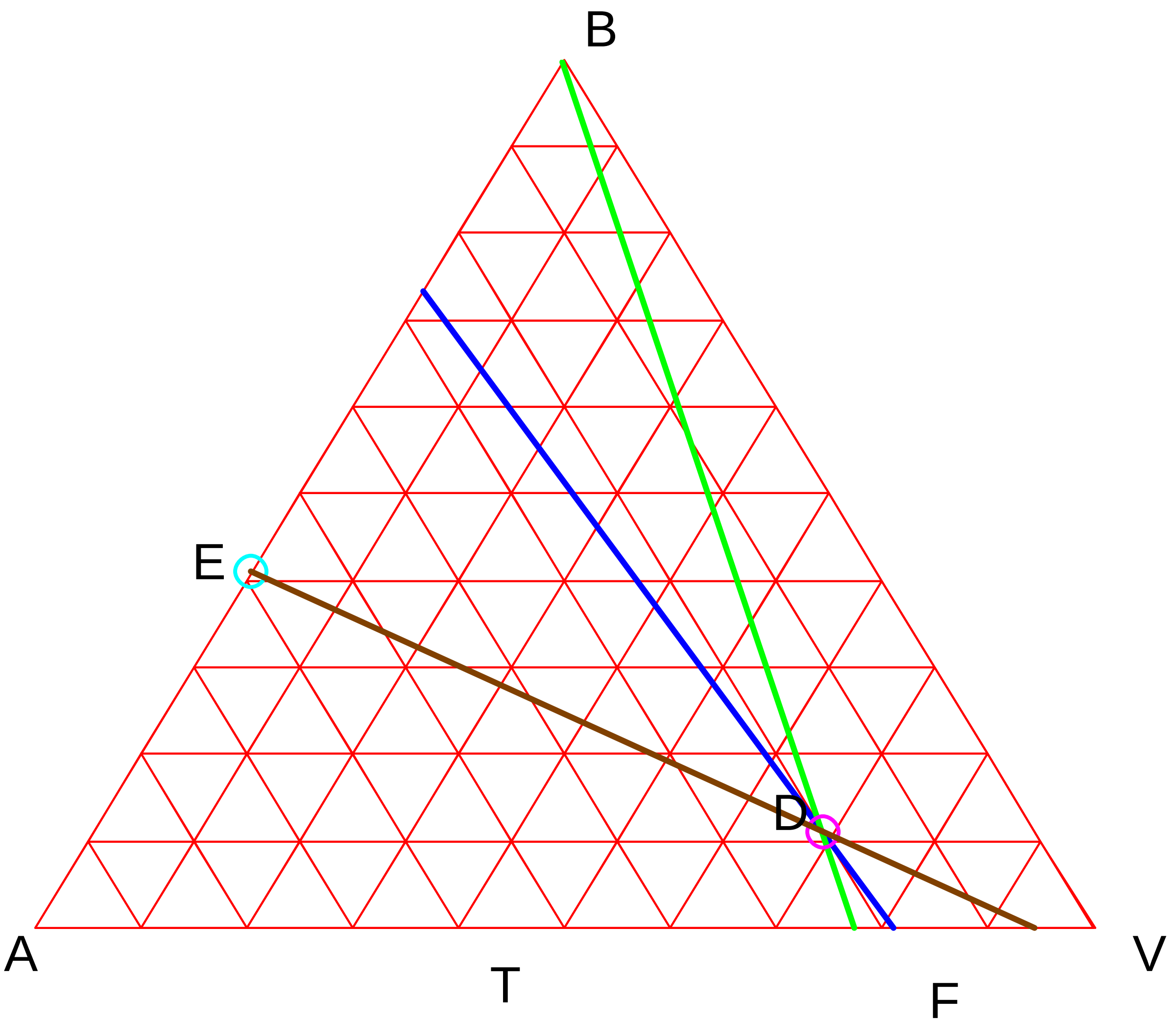
$x = 0.2$ $\quad xS_A = root(f(x), x)$ $\quad xS_A = 2.817 \times 10$ $\quad xS_B = 1 - xS_A$ $\quad xS_B = 0.997$ $\quad xS_V = 0$

Extremo de la línea (especificación S_2) sobre el lado AV

$$f(xD_A) = \left[(1 - xD_A) \cdot 2 \cdot \frac{Mw_{Cl}}{Mw_V}\right] \cdot 100 - S_2$$

$x = 0.2$ $\quad xW_A = root(f(x), x)$ $\quad xW_A = 0.226$ $\quad xW_B = 0$ $\quad xW_V = 1 - xR_A$ $\quad xW_V = 0$

Solución gráfica: se dibujan en el diagrama las dos especificaciones, que son líneas rectas en el diagrama triangular. De la intersección de estas dos líneas se lee la composición másica del terpolímero D.



La composición másica del copolímero F se obtiene prolongando la línea ED hasta el lado AV del triángulo (F no contiene B). Por la regla de la palanca las cantidades de E y F necesarias para fabricar la base de cálculo: las cantidades necesarias de E y F están en la proporcion de los segmentos DF/ED.

Las composiciones molares se obtienen a partir de las másicas y de las masas moleculares.

<u>Problema 2</u> **Nombre:** **Número de matrícula:**

El material del núcleo magnético de un transformador es un material compuesto formado por láminas planas paralelas de un material magnético (A), que también es conductor eléctrico, separadas por capas de un material (B), mal conductor de la electricidad. A y B son homogéneos e isótropos y ambos obedecen la ley de Ohm. Los espesores de las láminas son $d_A = 0.032$ m y $d_B = 0.0012$ m, y sus conductividades eléctricas son $s_A = 342$ S/m y $s_B = 5.6$ S/m respectivamente. Sus densidades son $r_A = 5.85 \times 10^3$ kg/m^3 y $r_B = 1800$ kg/m^3. Sus calores específicos o capacidades caloríficas a presión constante son $Cp_A = 2.042 \times 10^3$ J/kg.K y $Cp_B = 1800$ J/kg.K.

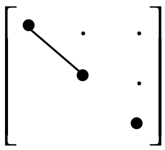
En un punto del núcleo del transformador, el campo eléctrico forma un ángulo de $q = 78$ ^{o} con la normal a las láminas de A y B, y su módulo es $E_{mod} = 860$ V/m. Determinar en ese punto:

- la conductividad eléctrica $\underline{\underline{s}}$ (S/m) del material compuesto del núcleo expresada en los ejes convencionales del material compuesto.
- el módulo de la densidad de corriente eléctrica $\underline{J}$ (A/m^2).
- la disipación de potencia eléctrica por unidad de volumen en ese punto (W/m^3), sabiendo que está dada por $\underline{J} \cdot \underline{E}$.
- la capacidad calorífica a presión constante (J/kg.K) del material compuesto del núcleo.
- si no hubiera refrigeración, a qué velocidad (K/s) subiría la temperatura en ese punto del núcleo debido a la disipación de potencia eléctrica.

(3 puntos, 45 minutos)

Solución: el material compuesto laminar pertenece a la clase límite ∞ / mm

Por tanto a estructura de la conductividad eléctrica (prop. de segundo orden, simétrica) es:



Las fracciones volumétricas se obtienen directamente de los espesores de las capas:

$$V_A = \frac{d_A}{d_A + d_B} \qquad V_B = \frac{d_B}{d_A + d_B}$$

$$V_A = 0.964 \qquad V_B = 0.036$$

Para esta clase, el eje convencional 3 va dirigido perpendicularmente al plano de las láminas (ver 03_01_01) (ver caso análogo para resistividades en 09_01_01). Las conductividades en direcciones 1 y 2 (componentes A y B en paralelo, caso de isogradiente o isotensión eléctrica), están dadas por:

$$s_{c11} = V_A \cdot s_A + V_B \cdot s_B \qquad s_{c11} = 329.84 \quad \text{S/m}$$

La conductividad en dirección 3 (componentes en serie, caso de isoflujo eléctrico, o isocorriente) está dada por:

$$s_{c33} = \left(V_A \cdot s_A^{-1} + V_B \cdot s_B^{-1}\right)^{-1} \qquad s_{c33} = 107.8 \quad \text{S/m}$$

Y la conductividad, representada como matriz, es por tanto:

$$s_c = \begin{pmatrix} s_{c11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{c11} & 0 \\ 0 & 0 & s_{c33} \end{pmatrix}$$

El campo eléctrico, expresado en el sistema de coordenadas convencional del material es:

$$E = \begin{pmatrix} E_{mod} \cdot Sen(q) \\ 0 \\ E_{mod} \cdot Cos(q) \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 841.207 \\ 0 \\ 178.804 \end{pmatrix} \quad \text{V/m}$$

Por la ley de Ohm:

$$J = s_c \cdot E \qquad J = \begin{pmatrix} 2.775 \times 10^5 \\ 0 \\ 1.928 \times 10^4 \end{pmatrix} \qquad \sqrt{J \cdot J} = 2.781 \times 10^5 \quad \text{A/m}^2$$

La potencia eléctrica disipada por unidad de volumen debido a la resistencia del material es:

$$J \cdot E = 2.369 \times 10^8 \quad \text{W/m}^3$$

La densidad del compuesto es:

$$r_c = V_A \cdot r_A + V_B \cdot r_B \qquad r_c = 5.704 \times 10^3 \quad \text{kg/m}^3$$

Puesto que es una propiedad específica másica (por unidad de masa), la capacidad calorífica del compuesto (por unidad de masa) es:

$$Cp_c = \frac{1}{r_c} \cdot \left(V_A \cdot r_A \cdot Cp_A + V_B \cdot r_B \cdot Cp_B\right) \qquad Cp_c = 2.039 \times 10^3 \quad \text{J/kg.K}$$

De un balance de energía no estacionario, diferencial, usando como volumen de control un elemento de volumen dV en torno al punto considerado, se obtiene:

$$r_c \cdot dV \cdot Cp_c \cdot dT = J \cdot E \cdot dV \cdot dt$$

de donde la velocidad de calentamiento dT/dt es: $\dfrac{J \cdot E}{r_c \cdot Cp_c} = 20.36$ K/s

También puede hacerse usando la capacidad calorífica por unidad de volumen de compuesto:

$$Cpv_c = V_A \cdot r_A \cdot Cp_A + V_B \cdot r_B \cdot Cp_B \qquad Cpv_c = 1.163 \times 10^7 \quad \text{J/m}^3\text{.K}$$

En este caso el balance de energía es:

$$dV \cdot Cpv_c \cdot dT = J \cdot E \cdot dV \cdot dt$$

de donde la velocidad de calentamiento dT/dt (K/s) es: $\dfrac{J \cdot E}{Cpv_c} = 20.36$ K/s

---