Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

18/06/2019

Final julio

Instrucciones:

- En cada pregunta de test sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- El test se recoge a los **40 minutos**.
- Tiempo total del examen: **4 horas** (dos partes de **2 horas** separadas por un descanso).
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico a lo largo de todo el examen.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en Moodle.
- **Justificar todas las respuestas en los 10 ejercicios y los 4 problemas**.

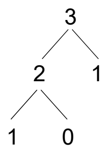
TEST (20%)

Dada la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

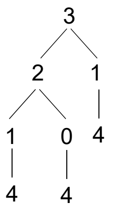
$$f(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \in \{0,1\} \\ 2f(n-1) + f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

se verifica que el árbol de dependencia de la función f en 3 es:

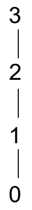
a)



b)



c)



A

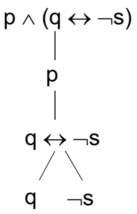
Si G es un grafo regular de grado r con n vértices y q aristas, una posible terna de valores r, n, q es

a) $r = 6, n = 3, q = 9$.
b) $r = 3, n = 6, q = 9$.
c) $r = 3, n = 6, q = 18$.

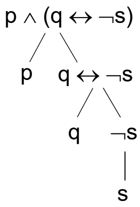
B

El árbol estructural de la fórmula $p \wedge (q \leftrightarrow \neg s)$ es:

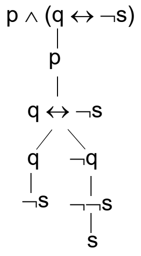
a)



b)



c)



B

En el conjunto de cadenas de bits de longitud 4 se considera la relación de equivalencia definida por: *una cadena está relacionada con otra si y solo si tienen iguales los dos primeros bits.* Entonces, el conjunto cociente tiene

a) cuatro elementos. b) tres elementos. c) dos elementos.

A

Sea $f : LIST(\mathbb{N}) \longrightarrow LIST(\mathbb{N})$ la función dada por

$$f(L) = \begin{cases} L & \text{si } L = [\,] \\ [[CAB(L)]] \parallel f(RESTO(L)) & \text{si } LISTA(CAB(L)) = 0 \\ CAB(L) \parallel f(RESTO(L)) & \text{si } LISTA(CAB(L)) = 1. \end{cases}$$

Entonces se verifica que $f([[1,2],3])$ es

a) $[[1,2],[3]]$ b) $[1,2,3]$ c) $[1,2,[3]]$

C

El número de cadenas de longitud 4 formadas con vocales distintas que empiezan por "a" o terminan en "u" es

a) $2 \cdot 4^3 - 3^2$ b) $2 \cdot V(4,3) - V(3,2)$ c) $3 \cdot 2$

B

La fórmula $p \wedge ((\neg p \wedge q) \vee \bot)$ es equivalente a

a) $\top$ b) $\bot$ c) q

B

Se considera el grafo $K_{2,6}$ y H el subgrafo de $K_{2,6}$ inducido por los vértices de grado 2. Se verifica que:

a) H tiene 2 componentes conexas.

b) H es un árbol.

c) Basta insertar 5 aristas en H para que sea conexo.

C

Se considera el dominio $D = \{\text{Estudiantes de la UPM}\}$ y los predicados $I(x) =$ "x estudia Informática", $C(x) =$ "x es un currante" y $F(x) =$ "x es un friki". La formalización del enunciado "Hay estudiantes de informática que son currantes y no son frikis" es:

a) $\exists x\,(I(x) \wedge C(x) \wedge \neg F(x))$

b) $\forall x\,(I(x) \wedge C(x) \to \neg F(x))$

c) $\exists x\,(I(x) \wedge C(x) \to \neg F(x))$

A

Los elementos maximales del conjunto $\{2,3,4,5,10\}$, ordenado con la relación de divisibilidad, son

a) 10 b) 4 y 10 c) 3, 4 y 10

C

ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐
Nombre:

Lógica y Matemática Discreta

18/06/2019

Final julio

DEFINICIONES (10%)

---

1. Definir fórmula satisfactible.

Una fórmula F es satisfactible si existe una valoración (o interpretación) que es modelo de F (para la cual el valor veritativo de F es 1).

2. Definir regla recursiva de una función recursiva $f : A \longrightarrow B$.

Es una regla que define el valor de f en algunos elementos de A usando el valor de f en otros elementos de A.

3. Enunciar las propiedades que debe de verificar una relación R de orden.

Reflexiva, antisimétrica y transitiva.

4. Enunciar el principio de inclusión - exclusión para tres conjuntos A, B, C.

Dados $A,\ B$ y C se verifica que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

5. Definir ciclo hamiltoniano.

Un ciclo hamiltoniano de un grafo G es un subgrafo de G que es un ciclo y contiene todos los vértices de G.

EJERCICIOS (30%)

1. Formalizar en lógica de proposiciones el siguiente razonamiento y probar que es correcto usando reglas de inferencia:

Si soy sincero, los demás confían en mi. Si los demás confían en mi, yo me siento fuerte y alegre. Cuando no puedo resolver problemas, me siento débil. Habitualmente soy sincero. Por tanto puedo concluir que puedo resolver problemas.

Se definen las variables proposicionales y se formaliza el razonamiento:

p = yo soy sincero
q = los demás confían en mi
r = yo me siento fuerte
s = yo me siento alegre
t = puedo resolver un problema

$$p \to q,\ q \to r \wedge s,\ \neg t \to \neg r,\ p \implies t$$

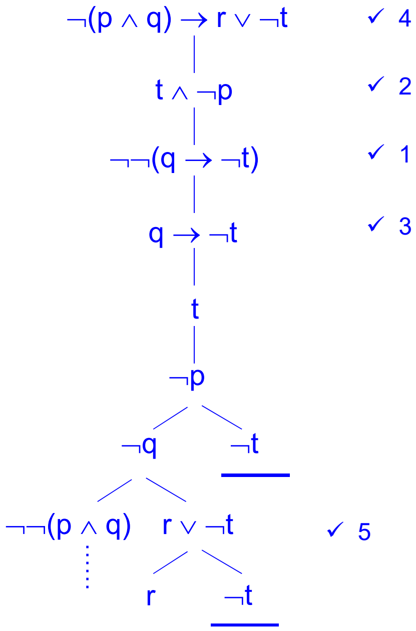
Probamos que el razonamiento es correcto usando reglas de inferencia:

$p,\ p \to q \implies q$ (Modus Ponens)
$q,\ q \to r \wedge s \implies r \wedge s$ (Modus Ponens)
$r \wedge s \implies r,\ s$ (Simplificación)
$r,\ \neg t \to \neg r \implies \neg\neg t$ (Modus Tolens)
$\neg\neg t \implies t$ (Equivalencia $\neg\neg A \equiv A$)

2. Probar que la siguiente estructura deductiva es incorrecta y dar un contraejemplo.

$$\neg(p \wedge q) \to r \vee \neg t\,,\ t \wedge \neg p \implies \neg(q \to \neg t)$$

El contraejemplo que demuestra que la estructura deductiva es incorrecta se puede obtener del tableau de las premisas y la negación de la conclusión, que será abierto.



Se observa que hay una rama abierta en la que no hay ninguna expresión por desarrollar y en ella están los literales t, $\neg p$, $\neg q$ y r. Por tanto, un contraejemplo es la valoración dada por

$$V(p) = V(q) = 0 \text{ y } V(r) = V(t) = 1,$$

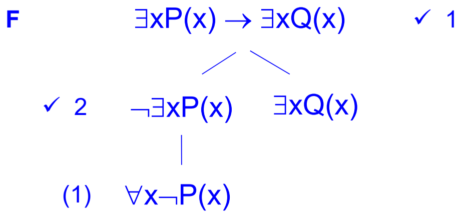
obtenida dando valor de verdad 1 a dichos literales.

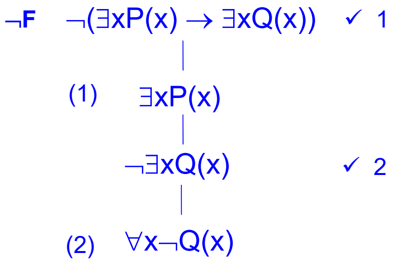
3. Usar el método del tableau para probar que la fórmula

$$F = \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$$

es contingente. Dar un modelo y un no modelo con dominio $D = \{d_1, d_2\}$.

Para probar que la fórmula F es contingente basta ver que los tableaux de F y de $\neg F$ son abiertos.





El modelo se obtiene de una rama abierta del tableau de F:

$D = \{d_1, d_2\}$

$P, Q : D \rightarrow \{0,1\}$ tal que $P(d_1) = P(d_2) = 0$, de (1), es modelo de F independientemente de los valores de Q.

El no modelo se obtiene de una rama abierta del tableau de $\neg F$:

$D = \{d_1, d_2\}$

$P, Q : D \rightarrow \{0,1\}$ tal que $Q(d_1) = Q(d_2) = 0$, de (2), y $P(d_1) = 1$, de (1), es no modelo de F independientemente del valor de $P(d_2)$.

4. Sea $f : \mathbb{Z} \times LIST(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida recursivamente por:

$$f(n,L) = \begin{cases} 0 & \text{si } L = [\,] & RB \\ f(n, RESTO(L)) & \text{si } LISTA(CAB(L)) = 0 \ \text{ y } CAB(L) \neq n & RR1 \\ CAB(L) + f(n, RESTO(L)) & \text{si } LISTA(CAB(L)) = 0 \text{ y } CAB(L) = n & RR2 \\ f(n, CAB(L)) + f(n, RESTO(L)) & \text{si } LISTA(CAB(L)) = 1 & RR3 \end{cases}$$

a) *(2 puntos)* Evaluar detalladamente y siguiendo el esquema recursivo dado $f(3,[1,3,3])$ y $f(5,[[5,1],5,5])$.

b) *(1 punto)* Describir lo que devuelve $f(n,L)$.

a) $f(3,[1,3,3]) \overset{RR1}{=} f(3,[3,3]) \overset{RR2}{=} 3 + f(3,[3]) \overset{RR2}{=} 3 + 3 + f(3,[\,]) \overset{RB}{=} 3+3+0 = 6$

$f(5,[[5,1],5,5]) \overset{RR3}{=} f(5,[5,1]) + f(5,[5,5]) \overset{RR2,RR2}{=} 5 + f(5,[1]) + 5 + f(5,[5]) \overset{RR1,RR2}{=}$
$5 + f(5,[\,]) + 5 + 5 + f(5,[\,]) \overset{RB,RB}{=} 5+0+5+5+0 = 15$

b) $f(n,L)$ devuelve la suma de los elementos de L de cualquier nivel que coinciden con n.

5.

a) Dar una definición recursiva de una función $f : LIST_P^*(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$ de modo que $f(L)$ sea la suma de los dos últimos elementos de L si $LONG(L) \geq 2$ y el doble de su único elemento si $LONG(L) = 1$.

b) Dar dos listas L_1 y L_2 tales que $LONG(L_1) \neq LONG(L_2)$, $f(L_1) = f(L_2)$ y que ambas estén en el conjunto de partida de f o justificar que no pueden existir.

a)

$$f(L) = \begin{cases} 2 \cdot CAB(L) & \text{si } LONG(L) = 1 \qquad (RB1) \\ CAB(L) + CAB(RESTO(L)) & \text{si } LONG(L) = 2 \qquad (RB2) \\ f(RESTO(RESTO(L))) & \text{si } LONG(L) \geq 3 \qquad (RR) \end{cases}$$

b) Conjunto de partida de $f = \{L \in LIST_P^*(\mathbb{N}) \mid LONG(L) \leq 2\}$.

Podemos tomar, por ejemplo, $L_1 = [3]$ y $L_2 = [2, 4]$ y se cumple:

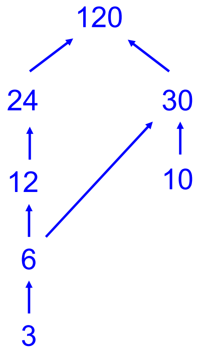
$$f(L_1) \overset{RB1}{=} 2 \cdot 3 = 6 \qquad \text{y} \qquad f(L_2) \overset{RB2}{=} 2 + 4 = 6$$

6. En el conjunto $A = \{3, 6, 10, 12, 24, 30, 120\}$ se considera la relación de orden de divisibilidad.

a) *(2 puntos)* Obtener su diagrama de Hasse y los elementos notables.

b) *(1 punto)* Dar una cadena de longitud máxima.

a) Los elementos minimales son 3 y 10. No hay mínimo puesto que hay dos elementos minimales. El diagrama de Hasse es el siguiente:



Sólo hay un elemento maximal que es 120. Por tanto, como el conjunto es finito, este elemento es el máximo. Es decir, 120 es comparable y mayor que todos los demás.

b) A la vista del diagrama de Hasse, una cadena de longitud máxima sería $\{3, 6, 12, 24, 120\}$.

7. En una frutería con 10 tipos de frutas exóticas distintas se pueden hacer dos tipos de compras:

i) Bolsas de 7 piezas de fruta.

ii) Cajas para dieta que contienen 7 frutas colocadas en linea para indicar qué fruta hay que ingerir cada día de la semana.

a) *(1.5 puntos)* ¿Cuántas bolsas distintas se pueden formar?

b) *(1.5 puntos)* ¿Cuántas cajas distintas se pueden formar?

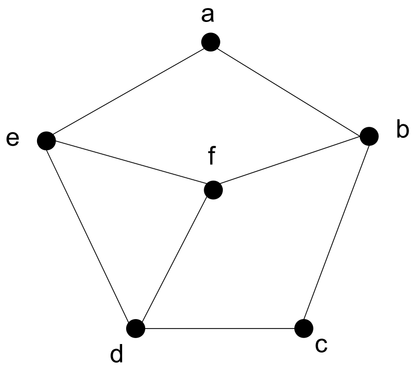
a) Tenemos que elegir 7 piezas de fruta para rellenar una bolsa, pudiendo haber repetición de frutas. Además, el orden en el que se echan en la bolsa no es relevante, por tanto, el número de bolsas distintas que se pueden formar es

$$CR(10,7) = \frac{16!}{9! \cdot 7!}$$

b) Ahora el orden en que se ponen las frutas en la caja es relevante puesto que cada pieza se refiere a un día distinto. Además, puede haber repetición de las frutas por lo que el número de cajas distintas de 7 frutas que se pueden formar es

$$VR(10,7) = 10^7$$

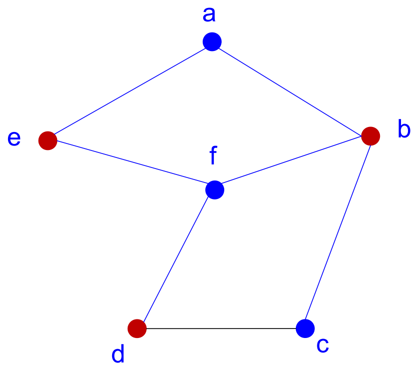
8. Estudiar si el siguiente grafo es bipartito. En caso de no serlo, indicar qué arista se puede quitar para que sí lo sea.



Basta observar que hay un subgrafo que es un ciclo impar, $\langle e, d, f \rangle$, por lo que el grafo no es bipartito.

Si se elimina la arista ed, ese ciclo desaparece y los vértices ya se pueden separar en dos subconjuntos de modo que cada arista del grafo incide en un vértice de cada conjunto. Concretamente, si tomamos

$V_1 = \{a, f, c\}$, $V_2 = \{e, b, d\}$ se verifica que $V_1 \cup V_2 = V$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.



Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐
Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

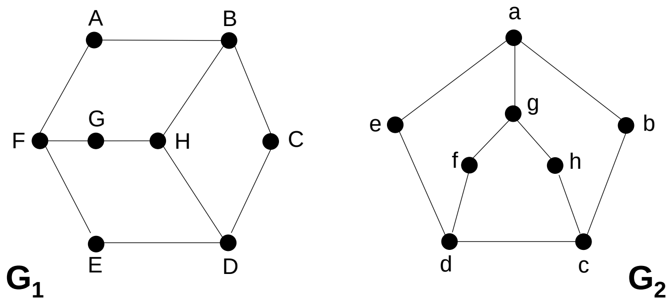
18/06/2019

Final julio

EJERCICIOS (30%)

---

9. Probar que el siguiente par de grafos no son isomorfos.

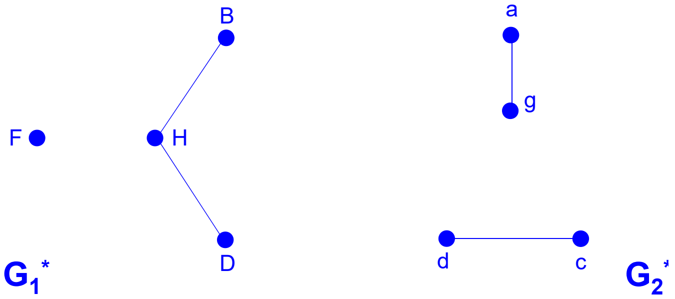


Vamos a calcular, para cada grafo, el número de vértices, de aristas y la secuencia de grados:

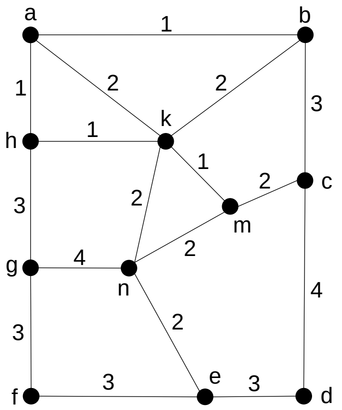
$$G_1 : \{n = 8, q = 10, sec(G_1) = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2]$$

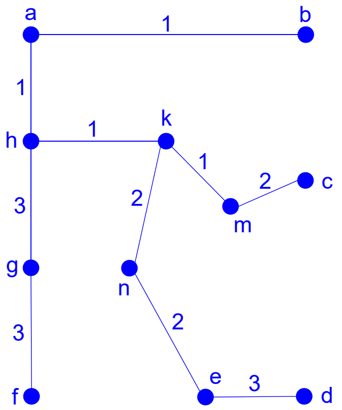
$$G_2 : \{n = 8, q = 10, sec(G_1) = [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2]$$

Se considera el subgrafo inducido por los vértices de grado 3 en G_1 y en G_2, que son, respectivamente, $G_1^* = \langle B, F, H, D\rangle$ y $G_2^* = \langle a, g, d, c\rangle$.
Estos dos subgrafos no son isomorfos pues sus secuencias de grados son distintas: $sec(G_1^*) = [2, 1, 1, 0]$ y $sec(G_2^*) = [1, 1, 1, 1]$. Por tanto, G_1 y G_2 tampoco son isomorfos.



10. Aplicar el algoritmo de Kruskal en el siguiente grafo para hallar un árbol generador (o recubridor) de peso mínimo. Hallar su peso e indicar el orden en que han sido elegidas las aristas.





Como hay 11 vértices, el algoritmo de Kruskal conduce a la selección de 10 aristas por orden de peso, de menor a mayor, y evitando formar ciclos. Primero se eligen todas las aristas de peso 1. Después se pueden eligir 3 aristas de peso 2 porque las demás conducen a ciclos. Por último, se eligen 3 aristas de peso 3 sin formar ciclos y ya tenemos las 10 aristas del árbol.
Una solución es el árbol generador T que aparece en la figura que tiene peso

$$w(T) = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 19$$

Obsérvese que cualquier árbol generador de peso mínimo tendrá peso 19.

ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐
Nombre:

Lógica y Matemática Discreta

18/06/2019

Final julio

PROBLEMA 1 (12%)

Se considera la siguiente estructura deductiva:

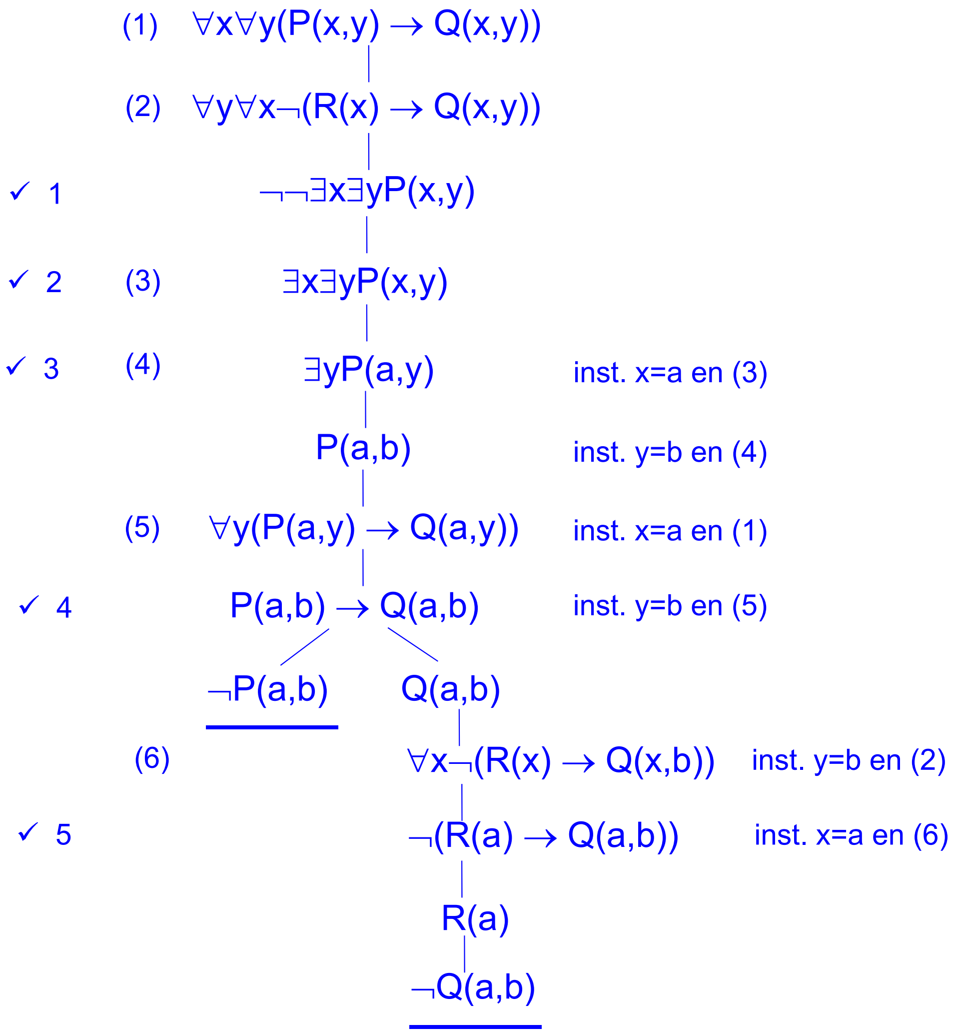
$$\begin{array}{rcl} A & = & \forall x \forall y \left(P(x,y) \to Q(x,y)\right) \\ B & = & \forall y \forall x \, \neg\left(R(x) \to Q(x,y)\right) \\ \hline C & = & \neg \exists x \, \exists y P(x,y) \end{array}$$

a) *(8 puntos)* Usar el método del tableau para probar que es correcta.

b) *(2 puntos)* Utilizar el apartado anterior (sin realizar más tableaux) para estudiar si la siguiente estructura deductiva es correcta para toda fórmula F:

$$A, B \quad \Rightarrow \quad \forall x \forall y \, \neg P(x,y) \vee F$$

a) Se realiza el tableau de $\{\, A,\ B,\ \neg C \,\}$:



Como el tableau es cerrado se puede asegurar que la estructura deductiva es correcta.

b) La fórmula $D = \forall x \forall y \, \neg P(x,y)$ es equivalente a $C = \neg \exists x \, \exists y P(x,y)$, por la equivalencia de la negación del cuantificador $\exists$. Del apartado anterior tenemos que $A, B \Longrightarrow C$ es correcta. Por tanto, dado que $D \equiv C$, se verifica que $A, B \Longrightarrow D$ es correcta. Finalmente, como $D \Longrightarrow D \vee F$ es correcta para cualquier F (regla de simplificación en lógica proposicional), se concluye que

$$A, B \quad \Rightarrow \quad \forall x \forall y \, \neg P(x,y) \vee F$$

es correcta para cualquier fórmula F.

ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐
Nombre:

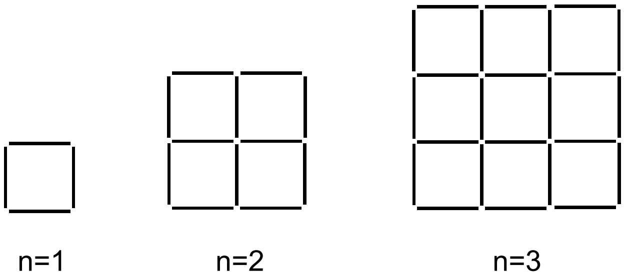
Lógica y Matemática Discreta

18/06/2019

Final julio

PROBLEMA 2 (10%)

Se quieren construir celosías para ventanas cuadradas de diferentes tamaños y para ello se utilizan listones de madera, tal como se muestra en la siguiente figura:



a) *(5 puntos)* Definir una función recursiva $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ de modo que $f(n)$ sea el número de listones de madera en la celosía de lado n. Explicar el proceso seguido para obtener la regla recursiva.

b) *(2 puntos)* Obtener la expresión explícita $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ que proporciona el número de listones de la celosía de lado n. **Indicación**: Calcular por separado el número de listones horizontales y verticales.

c) *(3 puntos)* Probar por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$.

a) Contamos el número de listones en las celosías dibujadas para $n = 1, n = 2$ y $n = 3$ intentando buscar una relación entre ellos

$$f(1) = 4$$
$$f(2) = 4 + 8 = f(1) + 8 = 12$$
$$f(3) = 12 + 12 = f(2) + 12 = 24$$

Buscamos también una relación entre el término que aparece sumando en cada paso: 8 para $n = 2$ y 12 para $n = 3$. El término que aparece sumando es $4n$.

Por tanto, la definición recursiva que buscamos es

$$f(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 1 \qquad (RB) \\ f(n-1) + 4n & \text{si } n \geq 2 \qquad (RR) \end{cases}$$

b) Ahora, para cada n, contamos el número de listones horizontales y verticales.

El número de listones horizontales para una celosía de lado n con $n \geq 1$ es $n(n+1)$. También el número de listones verticales para una celosía de lado n también es $n(n+1)$. Por tanto,

$$g(n) = n(n+1) + n(n+1) = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n, \;\; n \geq 1$$

c) Probemos por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$. Para ello,

Paso base: Comprobemos que $f(1) = g(1)$. Esto es cierto puesto que $f(1) = 4$ usando la regla básica y $g(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$.

Paso de inducción: Tomamos $n \geq 1$ y suponemos cierto que $f(n) = g(n)$ (HI). Tenemos que verificar que se cumple $f(n+1) = g(n+1)$.

Como $n \geq 1$ entonces $n + 1 \geq 2$ y podemos usar la regla recursiva:

$$f(n+1) \overset{RR}{=} f(n) + 4(n+1) \overset{HI}{=} g(n) + 4(n+1) = 2n^2 + 2n + 4(n+1) = 2n^2 + 6n + 4$$

Ahora,

$$g(n+1) = 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2 = 2n^2 + 6n + 4$$

Por tanto, por el principio de inducción, queda demostrado que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$.

ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐

Nombre:

Lógica y Matemática Discreta

18/06/2019

Final julio

PROBLEMA 3 (8%)

Se considera el conjunto X de las palabras, con significado o no, formadas por tres letras distintas elegidas de entre las 10 primeras del alfabeto castellano: $\{\, a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j \,\}$

En X se define la relación de equivalencia R:

$$\text{P } R \text{ Q} \iff \text{la palabra P tiene el mismo número de vocales que la palabra Q.}$$

a) *(2 puntos)* Probar que R no verifica la propiedad antisimétrica.

b) *(2 puntos)* Describir la clase de la palabra abc y dar su cardinal.

c) *(6 puntos)* Describir las clases de equivalencia que establece R en X y calcular el cardinal de cada una de ellas. Comprobar que la suma de estos cardinales coincide con $|X|$. Hallar el conjunto cociente X/R y calcular su cardinal.

a) Si tomamos las palabras abc y def estas palabras están relacionadas entre sí, es decir,

$abc\, R\, def$ y $def\, R\, abc$

porque las dos palabras tienen el mismo número de vocales, pero $abc \neq def$.

b) $\overline{abc} = \{$palabras de X que tienen exactamente una vocal$\}$.

Aplicando el principio de multiplicación resulta

$|\overline{abc}| = 3 \cdot V(3,1) \cdot V(7,2) = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 378$

Para este cálculo se ha tenido en cuenta que hay 3 vocales distintas, $\{\, a,\ e,\ i \,\}$, 3 posiciones donde colocar la vocal elegida y $V(7,2)$ formas de elegir las dos consonantes restantes del conjunto $\{\, b,\ c,\ d,\ f,\ g,\ h,\ j \,\}$.

c) La relación mira el número de vocales que tiene una palabra. Entre las letras de las que disponemos hay tres vocales y las palabras de X constan de tres letras, por lo tanto hay cuatro clases de equivalencia: la formada por las palabras sin vocales (como por ejemplo, bcd), la clase de las palabras con 1 vocal (como abc), la clase de las palabras con 2 vocales (como por ejemplo, aed)y la clase de las palabras con 3 vocales (como aei). Utilizando el principio de multiplicación, tenemos:

$|\overline{bcd}| = V(7,3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

$|\overline{abc}| = 3 \cdot V(3,1) \cdot V(7,2) = 378$

$|\overline{aed}| = 3 \cdot V(3,2) \cdot V(7,1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 126$

$|\overline{aei}| = P(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Además, $|X| = V(10,3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ y si sumamos los elementos de las cuatro clases de equivalencia tenemos que $210 + 378 + 126 + 6 = 720$.

El conjunto cociente de esta relación es $X/R = \{\overline{bcd}, \overline{abc}, \overline{aed}, \overline{aei}\}$ y su cardinal $|X/R| = 4$.

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐

Nombre:

ETSISI
UPM

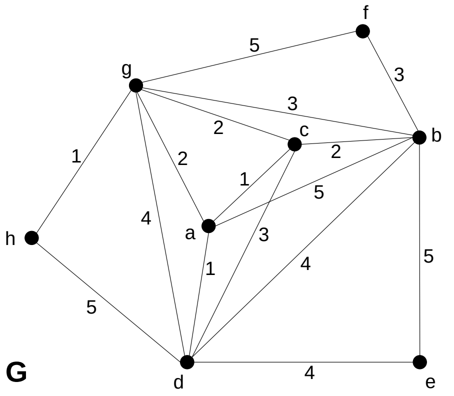
Lógica y Matemática Discreta

18/06/2019

Final julio

PROBLEMA 4 (10%)

En el grafo G se representan las plazas de un barrio de una ciudad y las calles que las unen. El peso de las aristas indica el tiempo, en minutos, que se tarda en recorrer las calles correspondientes.



a) *(2 puntos)* ¿Se pueden recorrer todas las plazas exactamente una vez cada una de ellas, empezando y terminando en la plaza a?

b) *(4 puntos)* Completar la tabla de distancias utilizando el algoritmo de Dijkstra y las propiedades de la función distancia.

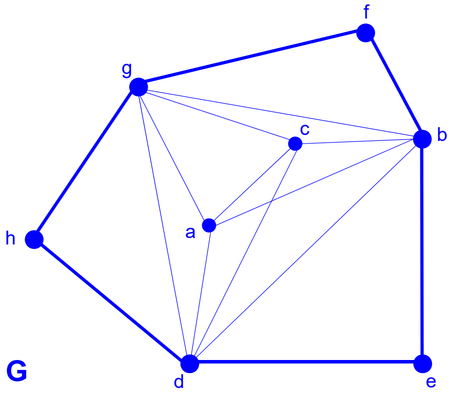
	a	b	c	d	e	f	g	h

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3	1		5	6	2	3
b			2		5	3	3	4
c					6	5	2	3
d								
e						8	7	8
f							5	6
g								1
h								

c) *(4 puntos)* Se quiere poner una comisaría de policía en una de las plazas de modo que se pueda atender cualquier emergencia que se produzca en las plazas más concurridas, que son a, e y g, en el menor tiempo posible ¿En qué plaza se debe colocar la comisaría? ¿Cuál será el tiempo máximo de atención a una emergencia?

a) Existe solución si el grafo es hamiltoniano, es decir, si existe un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo.

Las aristas incidentes en vértices de grado 2 (que son e, f y h), que tienen que estar necesariamente en el posible ciclo hamiltoniano, forman un ciclo que no es hamiltoniano porque no contiene a todos los vértices del grafo. Por tanto, el ciclo hamiltoniano no existe porque tendría como subgrafo el anterior ciclo, lo que no es posible.



b) Para completar la tabla de distancias aplicamos Dijkstra desde el vértice d

	a	b	c	d	e	f	g	h	
d	1	4	3	0	4	∞	4	5	d
a	–	4	2	–	4	∞	3	5	d, a
c	–	4	–	–	4	∞	3	5	d, a, c
g	–	4	–	–	4	8	–	4	d, a, g
b	–	–	–	–	4	7	–	4	d, b
e	–	–	–	–	–	7	–	4	d, e
h	–	–	–	–	–	7	–	–	d, a, g, h
f	–	–	–	–	–	–	–	–	d, b, f
$d(d, \cdot)$	1	4	2	0	4	7	3	4	

Para rellenar la tabla de distancias usamos que $d(u, v) = d(v, u)$ y $d(u, u) = 0$. Nos queda la siguiente tabla, a la que hemos añadido la última columna para el apartado c).

	a	b	c	d	e	f	g	h	$max\{d(\cdot, a), d(\cdot, e), d(\cdot, g)\}$
a	0	3	1	1	5	6	2	3	5
b	3	0	2	4	5	3	3	4	5
c	1	2	0	2	6	5	2	3	6
d	1	4	2	0	4	7	3	4	4
e	5	5	6	4	0	8	7	8	7
f	6	3	5	7	8	0	5	6	8
g	2	3	2	3	7	5	0	1	7
h	3	4	3	4	8	6	1	0	8

c) Como se quiere minimizar el tiempo hasta las plazas más concurridas $\{\, a,\ e,\ g \,\}$, se trata de determinar un centro del grafo respecto de ese conjunto de vértices, es decir, encontrar el vértice que verifique

$$min\{\, max\{\, d(v, a),\ d(v, e),\ d(v, g) \,\} \mid v \in V(G) \,\}$$

En la columna añadida a la tabla de distancias se puede ver que ese mínimo se consigue en el vértice d que es donde debería colocarse la comisaría. Además, el tiempo máximo que se tarda en atender una emergencia en los vértices del conjunto $\{\, a,\ e,\ g \,\}$ es 4 minutos.