Nombre: **Número de matrícula:**

- **sólo puntuarán las respuestas justificadas con desarrollo numérico, gráfico, etc.**
- **sólo una respuesta es correcta**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos**
- **usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos**
- **60 min., 0.5 puntos cada problema**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.

1. Para un material compuesto de fibra orientada unidireccionalmente se conocen todos los valores no nulos del tensor complianza:

$s_{1111} = 8.9\times10^{-10}\,Pa^{-1}$ $s_{3333} = 1.1\times10^{-10}\,Pa^{-1}$ $s_{1122} = -3.9\times10^{-10}\,Pa^{-1}$

$s_{1133} = -0.47\times10^{-10}\,Pa^{-1}$ $s_{2323} = 14.0\times10^{-10}\,Pa^{-1}$

Determinar la relación $\frac{G_{tl}}{G_{tt}}$ entre los valores de los módulos a cortadura (módulo a cortadura transversal-longitudinal/módulo a cortadura transversal-transversal).

l= dirección longitudinal; t= dirección transversal

- 1.311
- 0.457
- 1.829
- 0.328
- 1.523
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.: procediendo igual que en el ejercicio 09_02_03:

$$G_{tt} = \frac{1}{2\left(s_{11} - s_{12}\right)} = \frac{1}{2\left(s_{1111} - s_{1122}\right)} = \frac{1}{2(8.9\times10^{-10} + 3.9\times10^{-10})} = 3.91\times10^{8}\,Pa$$

$$G_{tl} = \frac{1}{s_{44}} = \frac{1}{4s_{2323}} = \frac{1}{4\times14\times10^{-10}} = 1.786\times10^{8}\,Pa$$

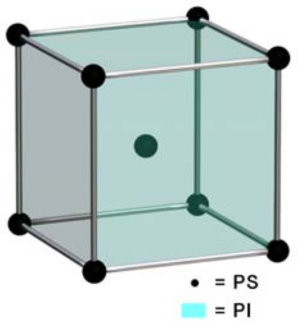
Por lo tanto, la relación que se pide es:

$$\frac{G_{tl}}{G_{tt}} = \frac{1.786\times10^{8}}{3.91\times10^{8}} = 0.457$$

2. Debido al carácter inmiscible de los bloques de poliestireno (PS) y poliisopreno (PI), los copolímeros derivados de los mismos son sistemas difásicos cuya morfología está determinada, entre otros factores, por el contenido en cada monómero. En el caso de que el contenido en PS sea bajo (17% en volumen), los bloques de PI forman una fase continua elastomérica en la que los bloques de PS se distribuyen en forma de esferas con una morfología similar a la red cúbica centrada en el cuerpo (BCC). Si la arista de la celda cúbica es 33.2 nm, calcular el radio de las esferas de PS.

- 12.773 nm
- 14.375 nm
- 9.056 nm
- 10.247 nm
- 12.779 nm
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.: de acuerdo con los datos del problema la morfología del copolímero es similar a la de una red cúbica centrada en el cuerpo, con la salvedad de que la fracción volumétrica de PS (la fase dispersa en forma de esferas) es 17%.
Conocida la arista de la celda cúbica es inmediato determinar su volumen, del que un 17% será PS, y que corresponderá necesariamente al volumen ocupado por 2 esferas de PS:



Número de esferas de PS en la celda:

$$8\times\frac{1}{8}(vértices)+1(centro)=2$$

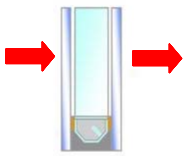
$$V_{celda}=a^3$$

$$V_{PS}=0.17\times V_{celda}=0.17\times a^3=2V_{esfera}=2\times\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\Rightarrow R=a\sqrt[3]{\frac{3\times 0.17}{8\pi}}=9.056nm$$

3. La mayor parte de la energía que utilizan las viviendas (un 40%) va destinada a hacer funcionar la calefacción y el aire acondicionado. Una de las zonas por las que se pierde una mayor cantidad de energía tanto en verano como en invierno es la formada por los cerramientos acristalados (ventanas). Afortunadamente, estas pérdidas pueden reducirse mucho instalando dobles acristalamientos. El principio del doble acristalamiento consiste en separar las dos hojas de vidrio paralelas por una cámara de aire (u otro gas de baja conductividad térmica).
Calcular la conductividad térmica en la dirección perpendicular al plano de las láminas, para un acristalamiento de este tipo formado por dos hojas de vidrio de 4 mm de espesor separadas por una cámara de gas argón de 16 mm de espesor, cuya conductividad térmica es un 67% de la conductividad térmica del aire.
Datos: $k_{aire} = 0.026\ Wm^{-1}K^{-1}$; $k_{vidrio}=1.1 Wm^{-1}K^{-1}$

- $3.430\times10^{-2}\ Wm^{-1}K^{-1}$
- $3.783\times10^{-1}\ Wm^{-1}K^{-1}$
- $5.587\times10^{-1}\ Wm^{-1}K^{-1}$
- $3.177\times10^{-2}\ Wm^{-1}K^{-1}$
- $2.593\times10^{-2}\ Wm^{-1}K^{-1}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.: teniendo en cuenta que para la transmisión de calor en la dirección perpendicular al plano de las láminas nos encontramos en condiciones de isoflujo, y la conductividad térmica es el análogo de la conductividad eléctrica (09_01_01, dispositivas 36-37), aplicando la regla de mezcla de Reuss:



Doble acristalamiento

$$\frac{1}{k_c} = \frac{V_V}{k_V} + \frac{V_A}{k_A} + \frac{V_V}{k_V} = 2\frac{V_V}{k_V} + \frac{V_A}{k_A}$$

siendo C= compuesto, V=vidrio y A=argón

Por otra parte las fracciones volumétricas se determinan fácilmente a partir de los espesores de las capas:

$$V_V = \frac{\delta_V}{\delta_V + \delta_A + \delta_V} = \frac{4}{4+16+4} = 0.1667$$

$$V_A = 1 - 2V_V = 0.6667$$

por lo que la conductividad térmica pedida es:

$$k = \left(2\frac{V_V}{k_V} + \frac{V_A}{k_A}\right)^{-1} = \left(2\frac{0.1667}{1.1} + \frac{0.6667}{0.026\times0.67}\right)^{-1} = 2.593\times10^{-2} Wm^{-1}K^{-1}$$

NOTA: las fracciones volumétricas se pueden asimismo calcular como

$$V_V = \frac{\delta_V}{\delta_V + \delta_A} = \frac{8}{8+16} = 0.333$$

$$V_A = 1 - V_V = 0.6667$$

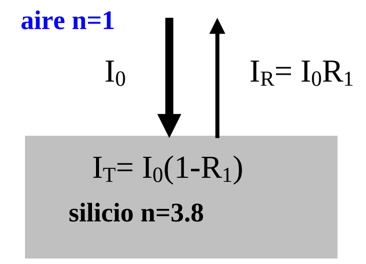
por lo que en este caso

$$k = \left(\frac{V_V}{k_V} + \frac{V_A}{k_A}\right)^{-1} = \left(\frac{0.333}{1.1} + \frac{0.667}{0.026\times0.67}\right)^{-1} = 2.593\times10^{-2} Wm^{-1}K^{-1}$$

4. Uno de los problemas del bajo rendimiento de los paneles solares usados en la actualidad, la mayor parte de silicio, es la pérdida de fotones por reflexión. El recubrimiento con capas antireflectantes (AR) permite reducir las pérdidas por este motivo.
Determinar el aumento porcentual en la cantidad de luz transmitida al silicio si la célula solar (n_{Si}=3.8) en lugar de estar en contacto con el aire (n_{aire}=1), se recubre con una capa de antireflectante (n_{AR}=1.95).
Suponer absorción nula en la capa de antireflectante.

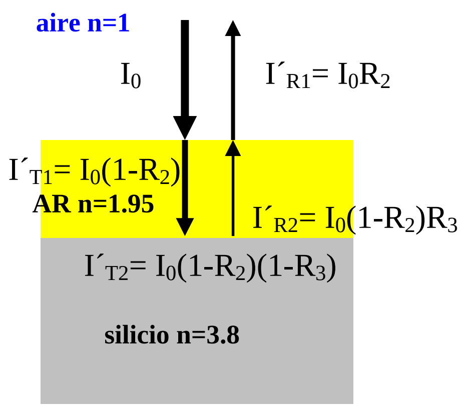
- 18.12%
- 21.79%
- 20.21%
- 21.17%
- 19.69%
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.: se trata de determinar la cantidad de luz transmitida en los dos casos (con capa AR y sin capa AR) :



para el sistema aire/silicio (sin AR):

$$I_T = I_0\left(1-R_1\right) = I_0\left(1-\left(\frac{3.8-1}{3.8+1}\right)^2\right) = 0.6597 I_0 = 65.97 I_0 (\%)$$



para el sistema aire/AR/silicio:

$$I'_{T2} = I_0\left(1-R_2\right)\left(1-R_3\right) = I_0\left(1-\left(\frac{1.95-1}{1.95+1}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{3.8-1.95}{3.8+1.95}\right)^2\right) = 0.8035 I_0 = 80.35 I_0 \left(\%\right)$$

por lo tanto el aumento porcentual en la cantidad de luz transmitida al silicio será:

$$\frac{80.35-65.97}{65.97}\times 100 = 21.79\%$$

5. Se difunde fósforo en una oblea gruesa de Si puro a una temperatura de 1000ºC. Si la concentración de átomos de fósforo en la superficie de la oblea es de 1×10^{27} átomos/m^3, calcular cuánto tiempo se necesita para que la concentración del agente dopante sea de 4×10^{23} átomos/m^3 a una profundidad de 1μm.
Datos: $D_0=3.9\times10^{-4}$ m^2/s; Q= 353kJ/mol

- 4.664×10^4 s
- 3.451×10^4 s
- 3.086×10^4 s
- 5.555×10^4 s
- 9.243×10^4 s
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.: el tiempo solicitado se determina aplicando la 2ª Ley de Fick para la difusión en el caso de un medio semiinfinito:

$$\frac{C_S - C_X}{C_S - C_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Son conocidos $C_s=1\times10^{27}$ átomos/m^3, $C_x=4\times10^{23}$ átomos/m^3, $C_0=0$ y x=1μm=10^{-6}m. Falta determinar el coeficiente de difusión, que de acuerdo con la ecuación de Arrhenius viene dado por:

$$D = D_0 e^{-\frac{Q}{RT}} = 3.9\times10^{-4} e^{-\frac{353000}{8.314\times1273}} = 1.276\times10^{-18} m^2 s^{-1}$$

Sustituyendo:

$$\frac{C_S - C_X}{C_S - C_0} = \frac{1\times10^{27} - 4\times10^{23}}{1\times10^{27}} = 0.9996 = erfz$$

Interpolando (tabla función error) se obtiene el valor de z, y finalmente el tiempo pedido:

$$erfz = 0.9996 \Rightarrow z = 2.52 \Rightarrow t = \frac{x^2}{4z^2 D} = \frac{\left(1\times10^{-6}\right)^2}{4\times 2.52^2 \times 1.276\times10^{-18}} = 3.086\times10^4 s$$

6. Se conocen las componentes del tensor expansión térmica ($\underline{\underline{\alpha}}$) para un determinado cristal, referidas a un sistema de ejes no coincidente con los ejes convencionales:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \times 10^{-6} K^{-1}$$

Deducir razonadamente a qué clase cristalográfica podría pertenecer este cristal:

- 4*mm*
- 422
- 3*m*
- 432
- 622
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.:para poder decidir a qué clase pertenece el cristal hay que diagonalizar la matriz 3x3 (ver ejercicio 05_01_04), ya que la propiedad de segundo orden está referida a un sistema arbitrario de ejes (no a los ejes convencionales):

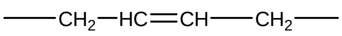
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 8-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 14.907; \lambda_2 = 6.432; \lambda_3 = 3.661$$

Se obtienen tres autovalores que son distintos entre sí: por lo tanto (ver 02_01_02, diapositivas 11-12) el material puede pertenecer a cualquiera de las clases de los sistemas monoclínico, triclínico u ortorrómbico.

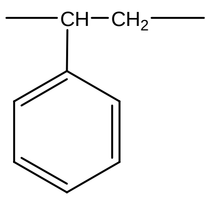
7. Uno de los cauchos sintéticos más importantes es el caucho de estireno-butadieno (SBR). Este elastómero se prepara a partir de copolímeros de butadieno-estireno que posteriormente son tratados con azufre para producir el entrecruzamiento de las cadenas (*vulcanización*). Si se dispone de un copolímero con un 20% en peso de estireno, calcular qué cantidad de azufre hay que añadir a 100g de este copolímero para conseguir enlazar el 10% de los sitios de entrecruzamiento .
Suponer que solamente un átomo de azufre interviene en cada entrecruzamiento.

- 6.22 g
- 5.33 g
- 4.74 g
- 4.24 g
- 9.72 g
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.:las estructuras y masas moleculares de las UER de estireno y butadieno son:



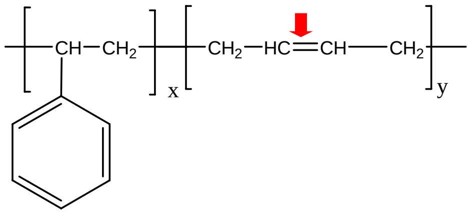
M(UER)=**54**g/mol



M(UER)=**104**g/mol

por lo que la estructura básica del SBR es (ver Smith, pág 214):

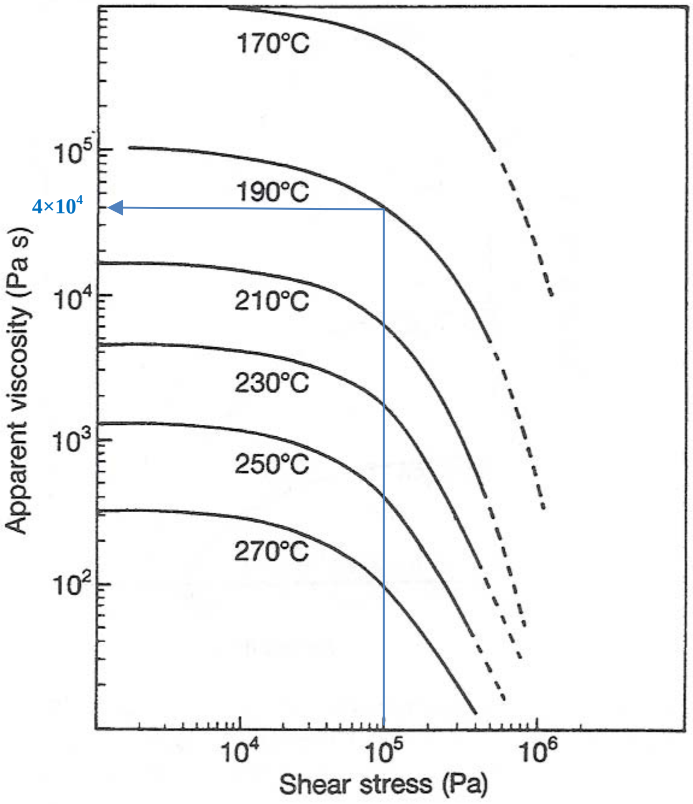
La presencia del doble enlace en el residuo de butadieno permite la reacción con azufre y el entrecruzamiento de las cadenas.



El copolímero SBR del problema contiene un 20% en peso de estireno, por lo que en 100g de copolímero hay 80g de butadieno; como de acuerdo con el enunciado sólo se van a producir entrecruzamientos en el 10% de los sitios posibles (es decir, en el 10% de los residuos de butadieno) consumiendo 1 átomo de S en cada uno de ellos, la masa de S necesaria para 100g de copolímero será:

$$\frac{\text{g de S}}{\text{100 g de copolímero}} = 80\text{g de butadieno} \times \frac{\text{1 mol de butadieno}}{\text{54g de butadieno}} \times \frac{\text{0.1 mol de S}}{\text{1 mol de butadieno}} \times \frac{\text{32 g de S}}{\text{1 mol de S}} = 4.74\,\frac{\text{g de S}}{\text{100 g de copolímero}}$$

8. Considere dos placas paralelas de área *A* separadas por una distancia *D*= 3 mm de modo que *D* es pequeña en comparación con cualquier dimensión de las placas para evitar el efecto de borde. Entre las placas hay polimetacrilato de metilo fundido, a una temperatura de 190ºC. Si una de las placas se deja en reposo mientras la otra se mueve con velocidad constante (v) en una dirección paralela a su propio plano, en condiciones ideales, el fluido sufre un movimiento deslizante puro. Si el esfuerzo cortante aplicado es de 100kPa, determinar la velocidad de la placa móvil.
NOTA: marcar en la gráfica la lectura efectuada



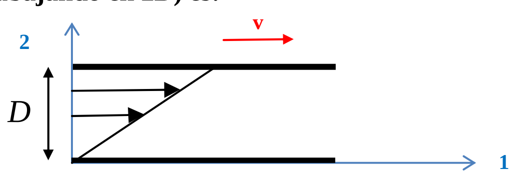
- 8.33×10^{-2} m/s
- 1.0×10^{-2} m/s
- 6.66×10^{-2} m/s
- 5.0×10^{-2} m/s
- 7.5×10^{-3} m/s
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

Sol.: Aplicando la ley constitutiva del fluido newtoniano generalizado, $\underline{\underline{\tau}} = -\eta \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

se relaciona el esfuerzo cortante con el gradiente de velocidad $\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \nabla \underline{v} + \left(\nabla \underline{v}\right)^T$

El campo de velocidades (trabajando en 2D) es:

$$v_1(x_1, x_2) = \frac{v}{D} x_2$$
$$v_2(x_1, x_2) = 0$$



y el tensor $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{v}{D} \\ \frac{v}{D} & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que $\tau_{21} = \tau_{12} = -\eta \dfrac{v}{D} \Rightarrow v = -\dfrac{\tau_{21} \times D}{\eta}$

Finalmente conocida la viscosidad (gráfica 4x10^4 Pa s) se obtiene la velocidad v

$$v = -\frac{\tau_{21} \times D}{\eta} = -\frac{-10^5 \times 3 \times 10^{-3}}{4 \times 10^4} = 7.5 \times 10^{-3} ms^{-1}$$

Problema 1

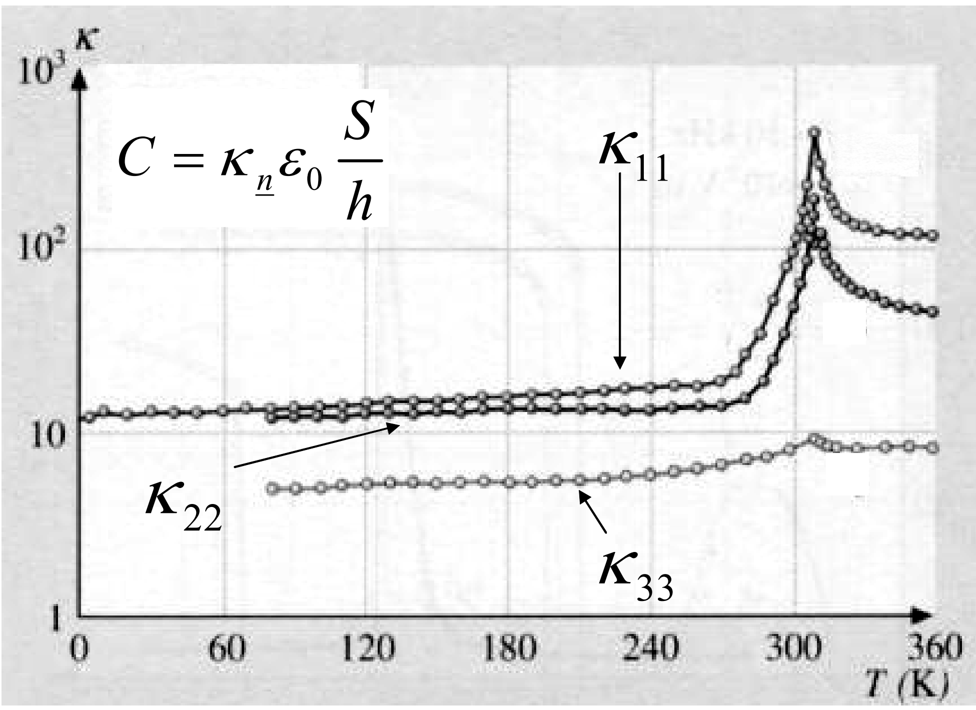
Nombre: **Número de matrícula:**

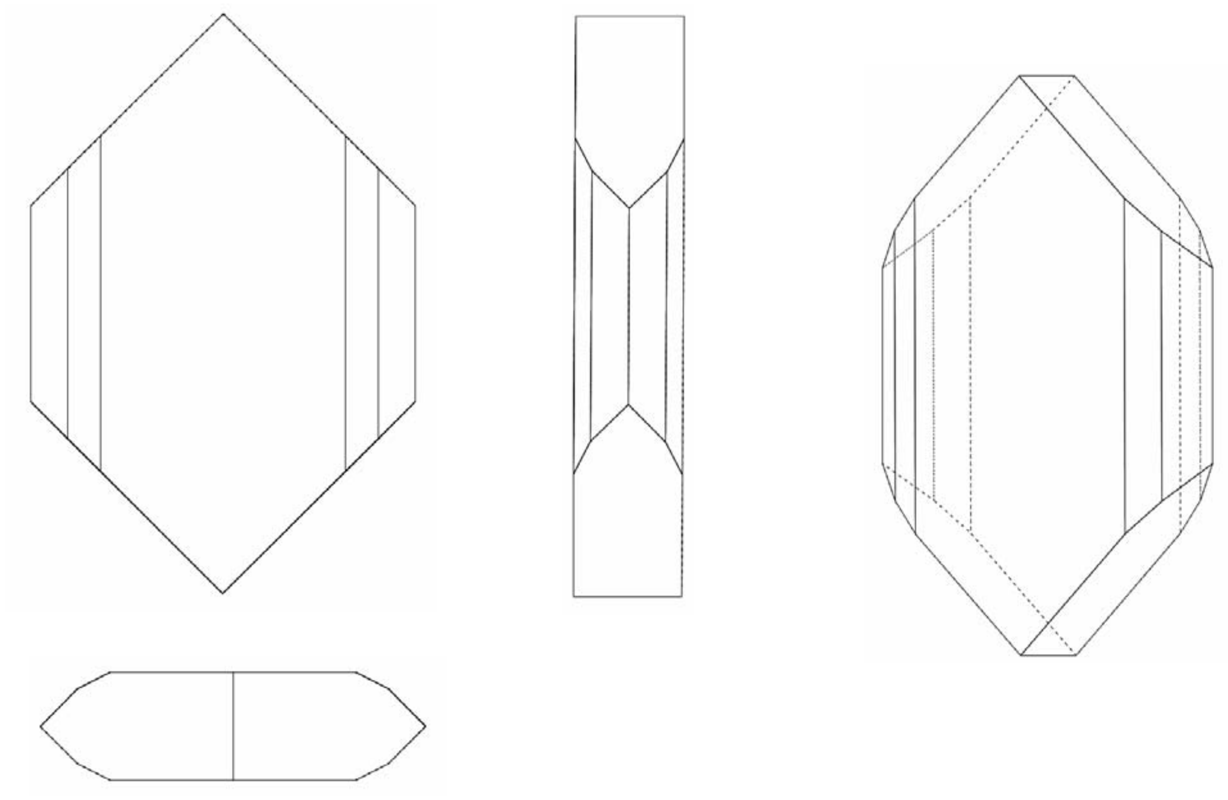
Un material cerámico se usa como dieléctrico en un condensador de alta capacidad. El dieléctrico es una lámina de dimensiones $L \times L \times h$ situada entre las placas del condensador, con $L = 5 \times 10^{-3}$ m, $h = 5 \times 10^{-4}$ m). Esta cerámica se sintetiza en el laboratorio en forma de monocristales como el de la figura, que tiene todos los elementos de simetría del material y puede usarse para determinar la clase.
Las componentes de la constante dieléctrica relativa κ_{ij} (prop. de segundo orden, simétrica) se conocen en función de la temperatura (ver figura; en esta figura, los índices de κ se corresponden con los ejes cartesianos convencionales). El condensador opera a 300 K.

La lámina de dieléctrico está cortada del monocristal de manera que un vector unitario normal a las caras cuadradas de la lámina forma un ángulo $\theta_1 = 48$ grados con el eje convencional 1, y un ángulo $\theta_2 = 55$ grados con el eje convencional 2. Determina:

1. a qué clase pertenece el dieléctrico.
2. los valores de las componentes κ_{ij} a la temperatura de operación.
3. la capacidad del condensador, según la fórmula indicada. La constante dieléctrica relativa que es necesario usar para calcular C es la que corresponde a la dirección del vector unitario normal n.

(3 puntos, 40 minutos)





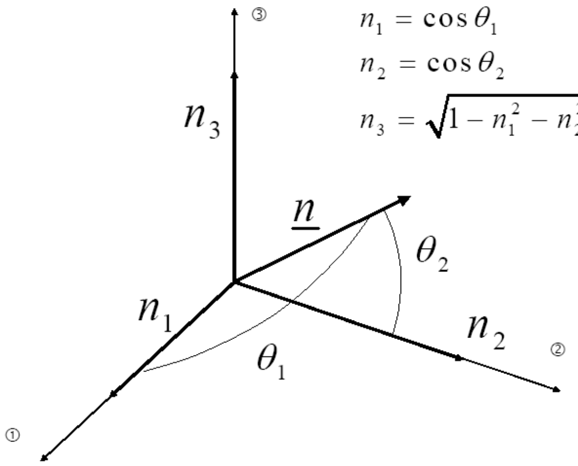
Sol.: para calcular la capacidad del condensador sólo se necesita calcular el valor de la constante dieléctrica relativa κ en la dirección indicada. El material es ortorrómbico, de la clase ***mmm.*** La estructura de la constante dieléctrica es por tanto:

$$str(\underline{\underline{\kappa}}) = \begin{bmatrix} \bullet & . & . \\ . & \bullet & . \\ . & . & \bullet \end{bmatrix}$$

Los valores de sus componentes se leen de la gráfica:
y se aplica (ver 02_01_02):

$\kappa_{11} = 117$ $\kappa_{22} = 55.5$ $\kappa_{33} = 8.5$

$$\kappa_{\underline{n}} = n_i n_j \kappa_{ij}$$



$$n_1 = \cos\theta_1$$
$$n_2 = \cos\theta_2$$
$$n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$$

$$n_1 = \cos\left(\frac{\theta_1 \cdot \pi}{180}\right)$$

$$n_2 = \cos\left(\frac{\theta_2 \cdot \pi}{180}\right)$$

$$n_3 = \sqrt{1 - n_1^{\,2} - n_2^{\,2}}$$

$$n_1 = 0.669$$
$$n_2 = 0.574$$
$$n_3 = 0.473$$

$$\kappa_n = \kappa_{11} \cdot n_1^{\,2} + \kappa_{22} \cdot n_2^{\,2} + \kappa_{33} \cdot n_3^{\,2} \qquad \kappa_n = 72.54$$

La capacidad del condensador es: $C = \kappa_n \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{L^2}{h}$ $\quad C = 3.21 \times 10^{-11}$ F

Problema 2

Nombre: **Número de matrícula:**

Los residuos urbanos (U) se pueden considerar globalmente como un material compuesto de materia orgánica biológica (O), materia inorgánica/metales (M), y plásticos (P). Si la concentración de componentes orgánicos M y P es excesiva (tal y como se especifica en (*) más abajo), existe riesgo de autocombustión en el vertedero. Experimentalmente se ha comprobado que la autocombustión de un compuesto de composición (x_M, x_O, x_P) tiene lugar si se cumple la condición:

$$A \cdot x_O + B \cdot x_P > C \qquad (*)$$

donde x_O es la fracción másica de O, y x_P es la fracción másica de P, y las constantes A, B y C son:
$A = 0.77$, $B = 0.65$ y $C = 0.501$.

Para eliminar el riesgo de autocombustión, los residuos se someten a una separación previa al vertido. En esta operación se separa selectivamente de U parte de su contenido en plástico P (que se recicla).

Dada una composición de U de $xU_M = 0.2$, $xU_P = 0.51$ (fracciones másicas), determina:

1. cuál es la cantidad mínima de P (kg) que es preciso separar de cada kg de U para que no exista riesgo de autocombustión,
2. cuál es la composición (en fracciones másicas, xV_M, xV_O, xV_P) del producto resultante V del apartado

anterior, es decir, la composición de lo que queda de U después de haber reducido su contenido de P.

Este problema puede hacerse analíticamente o con ayuda del diagrama triangular que se adjunta.

(3 puntos, 40 minutos)

Sol.: usamos como base de cálculo 1 kg de U, cuya composición es:

$$xU_O = 1 - xU_M - xU_P$$

$xU_M = 0.2$ $\quad xU_P = 0.51$ $\quad xU_O = 0.29$

puesto que $A \cdot xU_O + B \cdot xU_P = 0.555$ **y** $C = 0.501$

la composición de U dada excede el límite de autocombustión, por tanto será necesario realizar la operación de separación.

Método 1: la cantidad mínima de P que hay que separar se puede obtener resolviendo dos ecuaciones que expresan a) que el producto resultante (V) de la separacióm está exactamente en el límite de autocombustión, y b) que U es una mezcla de P puro y del producto V resultante de la separación:

La condición a), expresando xV_O como 1 - xV_M - xV_P, implica:

$$\boxed{A \cdot (1 - xV_M - xV_P) + B \cdot xV_P = C}$$

(V está exactamente en el límite de autocombustión)

La condición b) implica:

$$\boxed{\frac{xV_M - xU_M}{0 - xU_M} = \frac{xV_P - xU_P}{1 - xU_P}}$$

(U es una mezcla de P puro y del producto V resultante de la separación)

De estas dos ecuaciones lineales en xV_M y xV_P, y en las que A, B, C, xU_M, xU_P son datos del problema, se obtiene la composición xV_M , xV_P (fracciones másicas) de V, y por diferencia a 1, se obtiene xV_O :

$xV_M = 0.314$ $xV_P = 0.231$ $xV_O = 1 - xV_M - xV_P$ $xV_O = 0.455$

La cantidad de P que es necesario separar por cada kg de U se obtiene, por ejemplo, de un balance (conservación) de P: la cantidad de P que hay en U tiene que ser igual a la cantidad de P que hay en V, más la cantidad de P que se ha separado. Es decir:

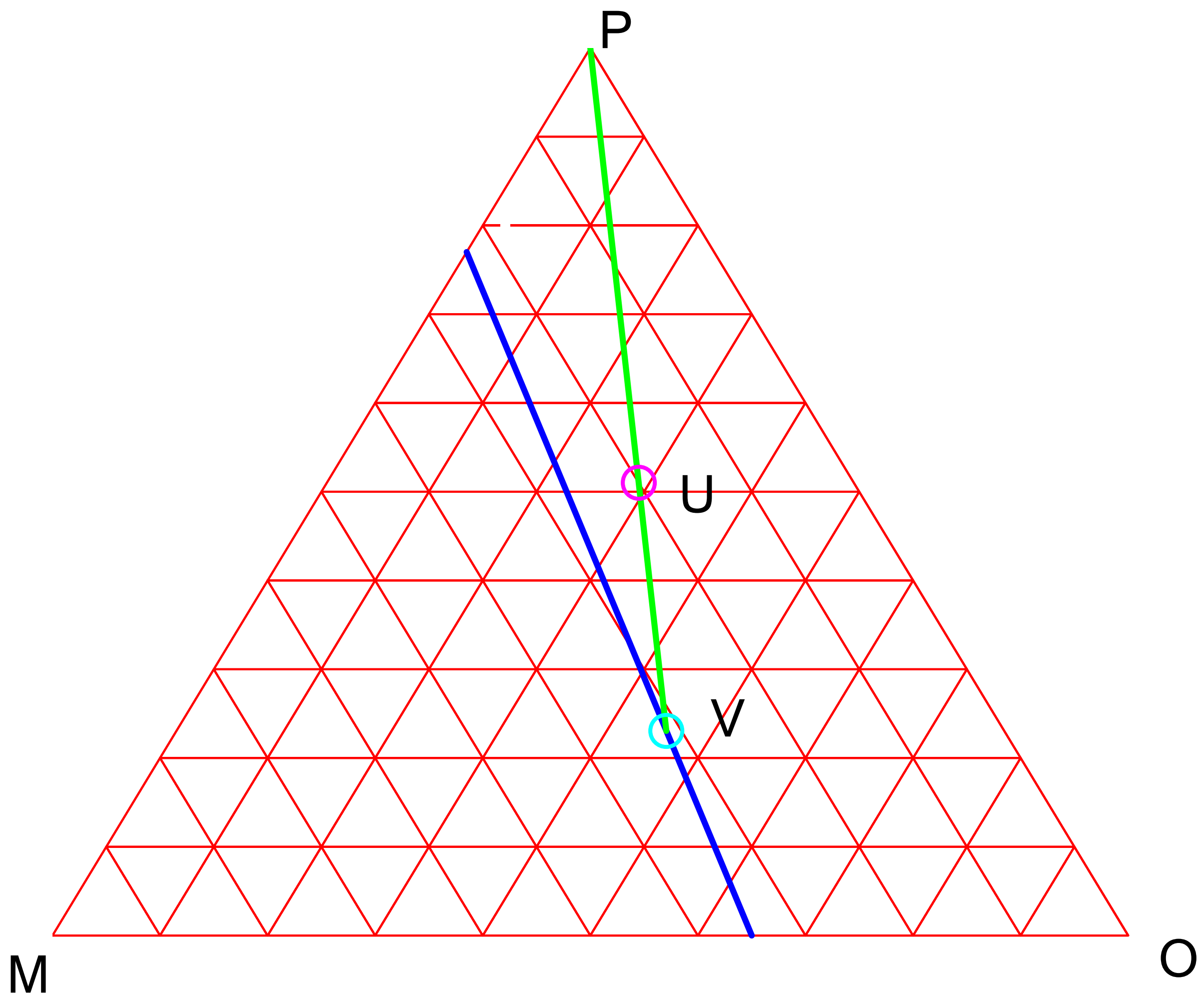
$$V \cdot xV_P + (1 - V)1 = 1 \cdot xU_P \quad \Rightarrow \quad V = \frac{xU_P - 1}{xV_P - 1} \qquad P = 1 - V$$

$V = 0.637$ kg de V / kg de U $P = 0.363$ kg de P / kg de U

Método 2: (solución gráfica) el límite de autocombustión del compuesto (la especificación del problema, es decir, la Ec. 1 con el signo igual en vez ">") es una línea recta en el diagrama triangular. Para representarla basta con dibujar dos puntos de la misma dando valores a xU_M y xU_P y uniendo los dos puntos (línea azul en el diagrama triangular).

Como V debe obtenerse separando P de U, para obtener el punto representativo de V se prolonga la recta que une P con U (línea verde en el diagrama triangular) hasta que corte con la línea de la especificación. La composición de V se lee directamente del diagrama.

La cantidad de P que se separa por cada kg de U se calcula c on ayuda de la regla de la palanca (relación entre las longitudes de los segmentos UV y PV), y se obtienen los mismos resultados.


P
U
V
M
O