Lógica
SEGUNDO CONTROL. VERSIÓN A
Grado en Ingeniería en Informática

Fecha: 4 de diciembre de 2014 **Tiempo: 75 min**

El examen está formado por seis problemas y se valorará sobre 55 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado. **Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**.

Ejercicio 1: (8 puntos) Usando el sistema de demostración de Gentzen de la lógica proposicional, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\neg p \vee q,\ s \to \neg r \wedge t,\ s \vee \neg r\} \vdash p \to q \wedge \neg r.$$

Ejercicio 2: (7 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento de la lógica de primer orden:

> Un número real es racional sólo si es distinto de $\sqrt{2}$. Existen números irracionales tales que su cuadrado es racional. Por tanto: el producto de dos irracionales puede ser racional.

Ejercicio 3: (8 puntos) Sea F el conjunto de las fórmulas de la lógica de primer orden. Siendo $A = \{\wedge, \to, \leftrightarrow\}$ y $P(A)$ el conjunto de las partes de A, define la función $f : F \to P(A)$, que asocia a toda $\varphi \in F$ el conjunto de los conectivos binarios distintos de $\vee$ que aparecen en φ.

Ejercicio 4: (10 puntos) Verifica si las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$\varphi_1 = \forall x \exists y (P(x,y) \to S(y)), \qquad \varphi_2 = \forall x \exists y (\neg P(x,y) \vee \neg S(y)).$$

Ejercicio 5: (12 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de adyacencias de un grafo simple $G = (V = (1,2,3,4), E)$. Considera la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, definida por:

$D = V$; $P^I = \{x : \text{el grado de } x \text{ es mayor que } 1\}$;
$Q^I = \{(x,y) : \text{el grado de } x \text{ es mayor que el grado de } y\}$;
f^I es la función $f^I : D \to D$ definida por: $f^I(1) = 3, f^I(2) = 2, f^I(3) = 1, f^I(4) = 2$;
$a^I = 2$.

Escribe explícitamente los elementos de los conjuntos P^I y Q^I y evalúa las siguientes cuatro fórmulas bajo la interpretación dada:

$\varphi_1 = \forall x \exists y (P(x) \vee Q(x,y))$, $\qquad \varphi_2 = \exists x \forall y (P(x) \wedge Q(x,y))$,
$\varphi_3 = \forall x \forall y (Q(x,y) \to P(f(x)))$, $\qquad \varphi_4 = \forall x \exists y (P(f(x)) \to Q(f(y), a))$,

Ejercicio 6: (10 puntos) Usando el sistema de demostración de Gentzen de la lógica de primer orden, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x(\neg P(x) \vee Q(x)),\ \forall x(S(x) \to \neg R(x) \wedge T(x)), \forall x(S(x) \vee \neg R(x)), \forall x P(x)\} \vdash \forall x(Q(x) \wedge \neg R(x)).$$