Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:**

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

25/06/2018

Final de julio

Instrucciones:

- En cada pregunta de test sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- El test se recoge a los **40 minutos**.
- Tiempo total del examen: **4 horas** (Dos horas cada parte y partes separadas por un descanso).
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico a lo largo de todo el examen.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en Moodle.
- **Justificar todas las respuestas en los 10 ejercicios y los 4 problemas**.

TEST (20%)

El conjunto de fórmulas $\{p \leftrightarrow \neg q,\ p \vee (s \wedge \neg q),\ A\}$ es insatisfactible si A es la fórmula:

a) $\neg(p \wedge s)$.

b) $p \vee q$.

c) $\neg p$.

C

La estructura deductiva $(p \to q) \to r\,,\, \neg q \;\Rightarrow\; p \to r$ verifica que

a) no es correcta y un contraejemplo es $V(p) = V(q) = V(r) = 0$.

b) no es correcta y un contraejemplo es $V(p) = 1, V(q) = V(r) = 0$.

c) es correcta.

B

La fórmula $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ es equivalente a:

a) $\exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)$.

b) $\forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)$.

c) $\forall x(P(x) \to Q(x))$.

A

Sea $P(n)$ una propiedad sobre el número natural n tal que, para todo $n \geq 10$, si $P(n)$ y $P(n+1)$ son ciertas entonces también lo es $P(n+2)$.
En esas condiciones, se puede garantizar que

a) si $P(1)$ y $P(2)$ son ciertas entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 1$.

b) si $P(13)$ y $P(14)$ son ciertas entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 10$.

c) si $P(13)$ y $P(14)$ son ciertas entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 13$.

C

Sea $f : \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathrm{LIST}(\mathbb{N})$ tal que

$$f(L) = \begin{cases} [\,] & \text{si } \mathrm{LONG}(L) = 0 \text{ ó } 1 \\ [[\mathrm{CAB}(L)]] \parallel f(\mathrm{RESTO}(\mathrm{RESTO}(L))) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $f([4,5,6,7,8])$ es

a) $[[4],[6]]$. b) $[[4],[6],[8]]$. c) $[[4],[6],[\,]]$.

A

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 diplomas distintos entre 3 chicos?

a) $C(8,3)$.
b) $VR(3,8)$.
c) $V(8,3)$.

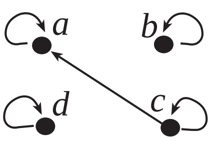
B

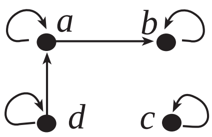
El coeficiente de x^2y^3 en el desarrollo de $(2x-y)^5$ es

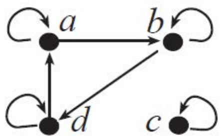
a) $-\binom{5}{2}$. b) $4 \cdot \binom{5}{2}$. c) $-4 \cdot \binom{5}{2}$.

C

¿Cuál de las siguientes relaciones binarias sobre el conjunto $A = \{a,b,c,d\}$ es transitiva?

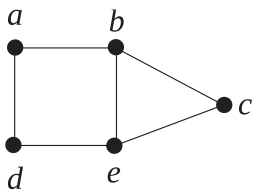
a) 

b) 

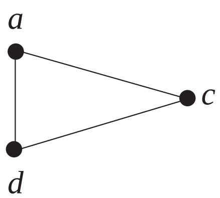
c) 

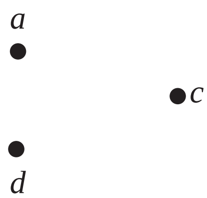
A

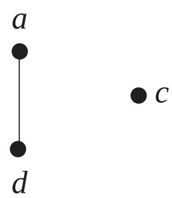
Se considera el siguiente grafo:



El subgrafo inducido por los vértices de grado dos es

a) 

b) 

c) 

C

Si G es un grafo sin ciclos con 30 vértices y 18 aristas, entonces el número de componentes conexas de G es

a) 12.
b) 13.
c) depende del grafo G.

A

DEFINICIONES (10%)

1. Definir tautología.

Una tautología es una fórmula cuyo valor veritativo es 1 para cualquier valoración (o interpretación en lógica de predicados).

2. Definir regla básica de una función recursiva $f : A \longrightarrow B$.

Es una regla que define de manera explícita el valor de f en algunos elementos de A.

3. Enunciar el principio de inclusión-exclusión para $|A \cup B|$.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

4. Enunciar la propiedad antisimétrica de una relación (A, R).

$\forall a, b \in A,\quad$ si $\quad aRb \quad$ y $\quad bRa \quad$ entonces $a = b$.

5. Enunciar la fórmula de Euler que relaciona los grados y el número de aristas en un grafo.

$\sum_{v \in V} gr(v) = 2q$, siendo $gr(v)$ el grado del vértice v y q el número de aristas del grafo.

EJERCICIOS (30%, hay 10)

Ejercicio 1. Dadas las fórmulas $F = (p \to q) \wedge (p \to \neg q)$ y $G = \neg(q \to p \vee q)$, probar, usando equivalencias, que:

- $F \equiv \neg p$.
- G es equivalente a una constante lógica.
- $F \to G$ es equivalente a una variable proposicional.

$$F = (p \to q) \wedge (p \to \neg q) \overset{1}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \overset{2}{\equiv} \neg p \vee (q \wedge \neg q) \overset{3}{\equiv} \neg p \vee \bot \overset{4}{\equiv} \neg p$$

$$G = \neg(q \to p \vee q) \overset{1}{\equiv} \neg(\neg q \vee (p \vee q)) \overset{5}{\equiv} \neg(p \vee (q \vee \neg q)) \overset{6}{\equiv} \neg(p \vee \top) \overset{7}{\equiv} \neg \top \equiv \bot$$

$$F \to G \overset{8}{\equiv} \neg p \to \bot \overset{1}{\equiv} \neg\neg p \vee \bot \overset{9}{\equiv} p \vee \bot \overset{4}{\equiv} p$$

1: $A \to B \equiv \neg A \vee B$	6: $A \vee \neg A \equiv \top$
2: Distributiva	7: $A \vee \top \equiv \top$
3: $A \wedge \neg A \equiv \bot$	8: Regla de sustitución
4: $A \vee \bot \equiv A$	9: $\neg\neg A \equiv A$
5: Asociativa y conmutativa	

Ejercicio 2. Formalizar, en lógica de predicados, los siguientes enunciados:

a) No todos son magos ni todos son brujos.

b) Existen magos que son brujos.

c) Los que son magos son brujos.

d) Algunos no son ni magos ni brujos.

Dominio $D = \{\text{personas}\}$

$M(x) = x$ es mago

$B(x) = x$ es brujo

a) No todos son magos ni todos son brujos	$\neg\forall x M(x) \land \neg\forall x B(x)$
b) Existen magos que son brujos	$\exists x(M(x) \land B(x))$
c) Los que son magos son brujos	$\forall x(M(x) \to B(x))$
d) Algunos no son ni magos ni brujos	$\exists x(\neg M(x) \land \neg B(x))$

Ejercicio 3. Probar, usando tableaux, que la siguiente fórmula es satisfactible y encontrar un modelo.

$$\neg(\exists x P(x) \to \forall x(Q(x) \lor P(x)))$$

$\neg(\exists x P(x) \to \forall(Q(x) \lor P(x)))$ ✓1

1 $\exists x P(x)$ ✓3

$\neg\forall(Q(x) \lor P(x))$ ✓2

2 $\exists x \neg(Q(x) \lor P(x))$ ✓4

$P(a)$ Eliminación del $\exists$ en **1** con x=a

$\neg(Q(b) \lor P(b))$ ✓5 Eliminación del $\exists$ en **2** con x=b

$\neg Q(b)$

$\neg P(b)$

El tableau es abierto, por tanto la fórmula es satisfactible.

Modelo:

- $D = \{d_1, d_2\}$
- $a = d_1$, $b = d_2$.
- $P, Q : D \longrightarrow \{0, 1\}$ tales que
  - $P(d_1) = 1$ y $P(d_2) = 0$.
  - $Q(d_1) = 0$ ó 1 y $Q(d_2) = 0$.

Ejercicio 4. Calcular el número de cadenas de 8 bits cuyo número de unos es múltiplo de 3.

Una cadena de 8 bits tiene entre 0 y 8 unos. Por tanto, si el número de unos es múltiplo de 3, tendrá un número de unos igual a: 0, 3 ó 6.

$A_0 = \{\text{ cadenas de 8 bits con 0 unos }\}$: $|A_0| = \binom{8}{0} = 1$.

$A_3 = \{\text{ cadenas de 8 bits con 3 unos }\}$: $|A_3| = \binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$.

$A_6 = \{\text{ cadenas de 8 bits con 6 unos }\}$: $|A_6| = \binom{8}{6} = \dfrac{8!}{6! \cdot 2!} = \dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 28$.

Por tanto, como estos conjuntos son disjuntos, usando el principio de adición el número de cadenas que cumplen lo pedido es $|A_0| + |A_3| + |A_6| = 1 + 56 + 28 = 85$.

Ejercicio 5. ¿Cuántas palabras se pueden formar con todas las letras de la palabra PUERTA en las que haya al menos dos vocales juntas?

Una forma de contarlas es usando el principio del complementario.

$A = \{\text{ palabras con las letras de PUERTA con al menos dos vocales juntas }\}$.

$A^c = \{\text{ palabras con las letras de PUERTA con todas las vocales separadas }\}$.

Como hay 3 vocales y 3 consonantes hay dos formas distintas de separar las vocales:

$$\text{VCVCVC} \qquad \text{ó} \qquad \text{CVCVCV}$$

En cada caso las vocales se pueden colocar en sus posiciones de 3! formas distintas y, por cada forma de poner las vocales, hay 3! formas distintas de colocar las consonantes.

En definitiva, usando los principios de adición y multiplicación tenemos que

$$|A^c| = 3! \cdot 3! + 3! \cdot 3! = 2 \cdot 3! \cdot 3!$$

Como todas las letras de PUERTA son distintas, el número de palabras que se pueden formar con sus letras es $P(6) = 6!$

Finalmente tenemos $|A| = 6! - 2 \cdot 3! \cdot 3! = 648$.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función definida recursivamente del siguiente modo:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ó } n = 1 & (R1) \\ f(n-1) + \dfrac{n}{2} & \text{si } n > 1 \text{ y } n \text{ es par} & (R2) \\ f(n-2) + \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n > 1 \text{ y } n \text{ es impar} & (R3) \end{cases}$$

Evaluar detalladamente, usando la definición, $f(6)$ y calcular el árbol de dependencia $T_f(6)$.

$$\begin{aligned} & f(6) \overset{R2}{=} f(5) + 3 \\ & \quad f(5) \overset{R3}{=} f(3) + 2 \\ & \quad\quad f(3) \overset{R3}{=} f(1) + 1 \\ & \quad\quad\quad f(1) \overset{R1}{=} 1 \\ & \quad\quad f(3) = 1 + 1 = 2 \\ & \quad f(5) = 2 + 2 = 4 \\ & f(6) = 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

$$T_f(6) \;=\; \begin{array}{c} 6 \\ | \\ 5 \\ | \\ 3 \\ | \\ 1 \end{array}$$

Ejercicio 7. Probar por inducción que $f(n) = g(n)\ \forall n \geq 1$, siendo $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } n = 1 & (RB) \\ f(n-1) + \dfrac{1}{n(n+1)} & \text{si } n > 1 & (RR) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

<u>Paso base</u>: Para $n = 1$. Se cumple $f(1) \overset{RB}{=} \frac{1}{2}$ y $g(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y, por tanto $f(1) = g(1)$.

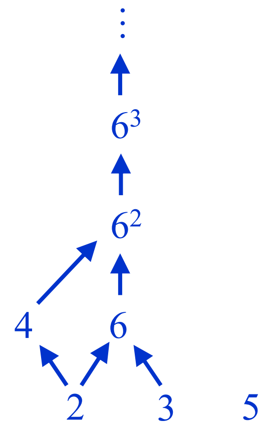
<u>Paso de inducción</u>: Sea $n \geq 1$ tal que $f(n) = g(n)$ (H.I.). Hay que probar que $f(n+1) = g(n+1)$.

$$\begin{aligned} f(n+1) &\overset{RR}{=} f(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{H.I.}{=} g(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = 1 - \left(\frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \\ &= g(n+1) \end{aligned}$$

Por tanto, por el Principio de Inducción, queda probado que $f(n) = g(n)\ \forall n \geq 1$.

Ejercicio 8. Hallar el diagrama de Hasse y los elmentos notables del conjunto ordenado $(A, |)$, siendo

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{6^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$



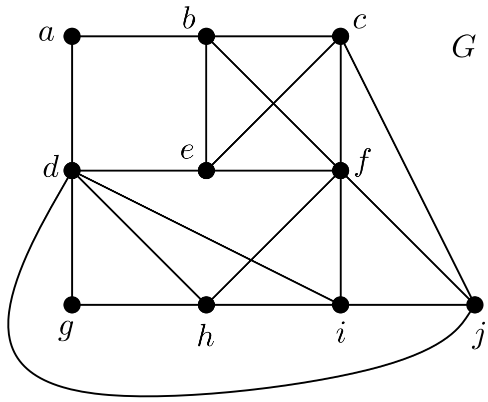
Minimales: 2, 3 y 5 (no hay elementos menores que éstos)

Mínimo: no hay, al haber más de un minimal

Maximales: 5 (no hay elementos mayores que él

Máximo: no hay, al haber una cadena infinita no acotada superiormente

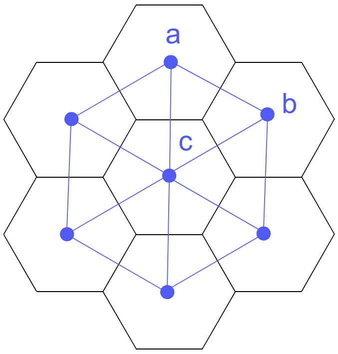
Ejercicio 9. Estudiar si el grafo G de la figura es euleriano y, en caso afirmativo, utilizar el algoritmo adecuado para encontrar un circuito euleriano.



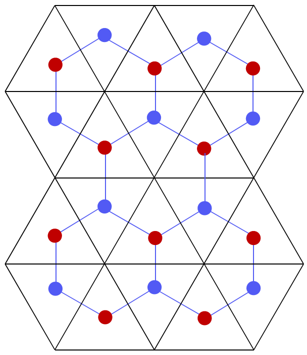
Los grados de los vértices son todos pares (2, 4 ó 6) y el grafo es conexo. Por lo tanto es euleriano. Para obtener un circuito que pase por cada arista una sola vez, basta obtener un circuito y después, revisando los vértices del mismo que todavía tienen aristas no incluidas en el circuito, ir insertando circuitos de aristas no utilizadas que parten de dichos vértices:

Circuito:	$a, \mathbf{b}, c, j, f, i, h, g, d, a$
Insertar:	b, f, e, b
Resultado:	$a, b, f, e, b, \mathbf{c}, j, f, i, h, g, d, a$
Insertar:	$c, e, d, i, j, d, h, f, c$
Resultado:	$a, b, f, e, b, c, e, d, i, j, d, h, f, c, j, f, i, h, g, d, a$

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes tableros, se considera un grafo en el que los vértices se corresponden con las casillas del tablero y se pone una arista entre dos vértices si las casillas correspondientes comparten un lado. En cada caso, dibujar el grafo y estudiar si es bipartito.



G



H

El grafo asociado a cada tablero aparece dibujado en el propio tablero.

El grafo G no es bipartito porque contiene ciclos de longitud impar. Por ejemplo, a, b, c, a es un ciclo de longitud 3.

El grafo H sí es bipartito. Con la bicoloración (coloración con dos colores) propuesta para los vértices, se tiene que cada arista tiene sus extremos en vértices de colores distintos. Por tanto, esa bicoloración define una partición del conjunto de vértices de tal modo que las aristas del grafo tienen un extremo en cada uno de los subconjuntos de vértices de la misma.

Problema 1 (12%)

Demostrar, usando reglas de inferencia, la corrección de la siguiente estructura deductiva.

$$u \to t \vee q,\ r \wedge \neg t \to \neg q,\ r \vee (s \wedge t) \to u \wedge \neg(s \wedge t) \implies s \to \neg r$$

SOLUCIÓN: Hacemos la demostración por reducción al absurdo, añadiendo $\neg(s \to \neg r)$ como premisa, y buscando $\perp$ como conclusión.

$\neg(s \to \neg r) \ \Rightarrow\ s \wedge \neg\neg r$	Equivalencia
$s \wedge \neg\neg r \ \Rightarrow\ s,\ \neg\neg r$	Simplificación
$\neg\neg r \ \Rightarrow\ r$	Equivalencia
$r \ \Rightarrow\ r \vee (s \wedge t)$	Adición
$r \vee (s \wedge t),\ r \vee (s \wedge t) \to u \wedge \neg(s \wedge t) \ \Rightarrow\ u \wedge \neg(s \wedge t)$	MP
$u \wedge \neg(s \wedge t) \ \Rightarrow\ u,\ \neg(s \wedge t)$	Simplificación
$u,\ u \to t \vee q \ \Rightarrow\ t \vee q$	Modus Ponens
$\neg(s \wedge t) \ \Rightarrow\ \neg s \vee \neg t$	Ley de De Morgan
$s,\ \neg s \vee \neg t \ \Rightarrow\ \neg t$	Silogismo Disyuntivo
$r,\ \neg t \ \Rightarrow\ r \wedge \neg t$	Conjunción
$r \wedge \neg t,\ r \wedge \neg t \to \neg q \ \Rightarrow\ \neg q$	Modus Ponens
$\neg q,\ t \vee q \ \Rightarrow\ t$	Silogismo Disyuntivo
$t,\ \neg t \ \Rightarrow\ t \wedge \neg t$	Conjunción
$t \wedge \neg t \ \Rightarrow\ \perp$	Equivalencia

Por tanto, queda demostrado que la estructura deductiva es correcta.

Apellidos: **Iniciales 1^{er}apellido:** ☐☐☐

Nombre: **LyMD. Final de julio** 25/6/18

Problema 2 (10%)

Sea f una función tal que, dada una lista plana de números enteros L, devuelve la lista que conserva todo elemento de L (en el mismo orden que en L) que tiene elemento siguiente y que su suma con él es mayor o igual que 10.

a) *(6 puntos)* Dar una definición recursiva de f indicando los conjuntos inicial y final.

b) *(1,5 puntos)* Calcular el conjunto de partida de f.

c) *(2,5 puntos)* Evaluar $f([2,6,7,3,8])$ usando la definición recursiva.

SOLUCIÓN:

a) $f : \text{LIST}_P(\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{LIST}_P(\mathbb{Z})$

$$f(L) = \begin{cases} [\,] & \text{si } LONG(L) = 0 \text{ ó } 1 & (RB) \\ \big[\text{CAB}(L)\big] \| f(\text{RESTO}(L)) & \text{si } \text{LONG}(L) \geq 2 \text{ y} & \\ & \text{CAB}(L) + \text{CAB}(\text{RESTO}(L)) \geq 10 & (RR1) \\ f(\text{RESTO}(L)) & \text{en otro caso} & (RR2) \end{cases}$$

b) El conjunto de partida es $A_0 = \{\, L \in LIST_P(\mathbb{Z}) \mid LONG(L) = 0 \text{ ó } 1 \,\}$.

c)

$$\begin{aligned} f([2,6,7,3,8]) &\overset{RR2}{=} f([6,7,3,8]) \overset{RR1}{=} [6] \parallel f([7,3,8]) \overset{RR1}{=} [6] \parallel [7] \parallel f([3,8]) \\ &\overset{RR1}{=} [6] \parallel [7] \parallel [3] \parallel f([8]) \overset{RB}{=} [6] \parallel [7] \parallel [3] \parallel [\,] = [6,7,3] \end{aligned}$$

a) En "maxima" sería:

```
f(L):= if L = [ ]             then [ ]   else
       if resto(L) = [ ]      then [ ]   else
       if cab(L) + cab(resto(L)) >= 10
                              then conc([cab(L)],f(resto(L)))
                              else f(resto(L));
```

otra solución:

```
long(L):= if L = [ ]   then 0
                       else 1 + long(resto(L));
f(L):=   if long(L) = 0      then [ ]   else
         if long(L) = 1      then [ ]   else
         if cab(L) + cab(resto(L)) >= 10
                             then conc([cab(L)],f(resto(L)))
                             else f(resto(L));
```

Problema 3 (8%)

Sea $A = \{10, \ldots, 99\}$ el conjunto de números de dos cifras y R la relación sobre A definida del siguiente modo:

$$x_1x_2 \, R \, y_1y_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

a) *(2 puntos)* Describir la clase de 23 y dar su cardinal.

b) *(6 puntos)* Calcular el conjunto cociente A/R, dando un representante de cada clase. ¿Cuántas clases distintas hay?

c) *(2 puntos)* Obtener todas las clases que tengan un único elemento.

Solución:

a) $[23] = \{ x_1x_2 \mid x_1 + x_2 = 5 \} = \{ 14, 23, 32, 41, 50 \}$ y $|[23]| = 5$.

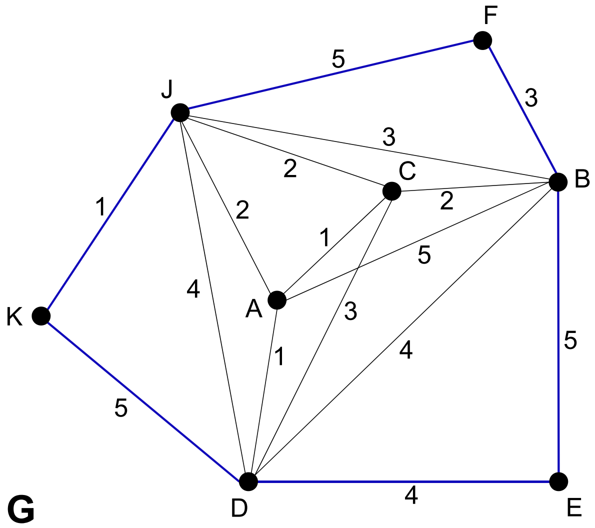
b) La suma $x_1 + x_2$ de los dígitos de los elementos de A varía desde 1 ($x_1 = 1$ y $x_2 = 0$) hasta 18 ($x_1 = x_2 = 9$) y todos los valores intermedios entre 1 y 18 se pueden obtener como suma de dos dígitos. Por tanto, el conjunto cociente tiene 18 clases distintas. Una posible elección de los representantes de las clases es la siguiente:

$$\begin{aligned} A/R = \{ \quad & [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], \\ & [19], [29], [39], [49], [59], [69], [79], [89], [99] \quad \} \end{aligned}$$

c) Las clases $[x_1x_2]$ que tienen un único elemento cumplen que la ecuación $x_1 + x_2 = d$, con $1 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2 \leq 9$ y $1 \leq d \leq 18$, tiene solución única. Esto solo ocurre cuando $d = 1$ ($x_1x_2 = 10$) y $d = 18$ ($x_1x_2 = 99$). Por tanto las clases con un único elemento son $[10]$ y $[99]$.

Problema 4 (10%)

El grafo G de la figura representa el Metro en una ciudad. Los vértices se corresponden con las estaciones, las aristas con los túneles que las unen y sus pesos con los tiempos para ir de una estación a otra.

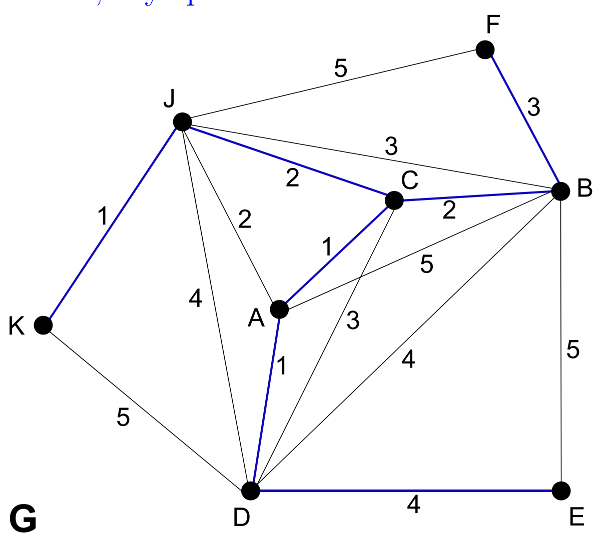


a) *(2 puntos)* Determinar si en dicha red de Metro se puede viajar pasando por todas las estaciones una sola vez, empezando y terminando en la estación B.

El ciclo hamiltoniano de G, si existe, debe tener 8 aristas (tantas como vértices) e incluir las aristas incidentes en los vértices de grado 2. Como observamos en la figura de arriba, estas aristas forman un ciclo C_6. Por tanto, el grafo G no es hamiltoniano, porque un ciclo no puede contener otro ciclo más pequeño.

b) *(2 puntos)* Calcular una subred que conecte todas las estaciones y minimice la suma de los tiempos de todos sus túneles.

La subred que nos piden es el árbol generador de peso (tiempo) mínimo. Para calcularla usamos el algoritmo de Kruskal que consiste en, a partir del grafo sin aristas, ir añadiendo la arista de menor peso que no forme ciclos con las anteriores, hasta completar un árbol. El resultado es el siguiente árbol, cuyo peso es 14.



c) *(1,5 puntos)* Sabemos que el cruce (a distinto nivel) de los túneles AB y CD se podría haber evitado si no existiese en la red ninguna subred H isomorfa al grafo completo K_5. Encontrar, si existe, dicha subred y, si no, justificarlo.

La subred que nos piden es $H = \langle A, B, C, D, J \rangle$. Para comprobarlo basta observar que H tiene 5 vértices y que todos ellos tienen grado 4, de lo que se deduce que H es un K_5.

d) *(3 puntos)* Usar las propiedades de la distancia y el algoritmo de Dijkstra para completar la tabla de distancias entre estaciones:

	A	B	C	D	E	F	J	K	$s(\cdot)$
A	0	3	1	1	5	6	2	3	**21**
B	3	0	2	4	5	3	3	4	24
C	1	2	0	2	6	5	2	3	**21**
D	1	4	2	0	4	7	3	4	25
E	5	5	6	4	0	8	7	8	43
F	6	3	5	7	8	0	5	6	40
J	2	3	2	3	7	5	0	1	23
K	3	4	3	4	8	6	1	0	29

En primer lugar usamos las propiedades de la distancia: d(v,v)=0 para todo $v \in V$ y $d(u,v) = d(v,u)$ para todo $u, v \in V$.
A continuación aplicamos el algoritmo de Dijkstra para calcular las distancias desde D.

A	B	C	D	E	F	J	K
1	4	3	**0**	4	∞	4	5
	4	**2**		4	∞	3	5
	4			4	∞	**3**	5
	4			4	8		4
				4	7		4
					7		**4**
					7		

e) *(1,5 puntos)* El operario de mantenimiento de las estaciones debe ubicar su taller en una de las estaciones. Cada día debe desplazarse del taller a una estación, trabajar en su mantenimiento y volver al taller. En cada programa de mantenimiento el operario trabaja en todas las estaciones una sola vez. ¿Dónde debe ubicar el taller para minimizar el tiempo de desplazamiento entre el taller y las estaciones en un programa completo de mantenimiento?
El taller debe colocarse en una mediana del grafo, que es un vértice que minimiza la suma de distancias a los demás. Calculamos, en la tabla de distancias, la suma de distancias de cada vértice colocando los resultados en una nueva columna. A la vista de estos resultados el taller debe colocarse en el vértice A o en el vértice C, que son las medianas del grafo.