Examen de Estadística. Junio de 2012

A) CUESTIONES

1. (1 punto) Defínase el concepto de Función de distribución empírica de la muestra, $F_n^*(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y calcúlese la esperanza y la varianza de $F_n^*(x)$ a $x$ fijo y variando la muestra.
2. (1 punto) Defínase el concepto de Estadístico Minimal Suficiente y enúnciese el Teorema de Caracterización de los estadísticos minimales suficientes. Póngase un ejemplo en el que se vea su aplicación.
3. (1 punto) Indíquense al menos dos inconvenientes que presentan los estimadores insesgados e ilústrese con algún ejemplo
4. (1 punto) Determínese un intervalo de confianza, con nivel de confianza $1-\alpha$, para la media $\mu$ de una población Normal de media $\mu$ y varianza conocida $\sigma^2$ a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño $n$. Obténgase una región creible de probabilidad $1-\alpha$ para $\mu$ en la situación anterior y suponiendo que la distribución a priori sobre $\mu$ es una normal de media cero y varianza 1.
5. (1 punto) Defínase el concepto de p-valor y póngase un ejemplo en el que se ilustre claramente su significado e importancia.

B) PROBLEMAS

1. Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad
$$f_\theta(x) = \frac{1}{x \ln \theta}, \ 1 < x < \theta.$$
Se considera una muestra aleatoria simple de tamaño n. Se pide:
   (a) (1.25) Estímese $\theta$ por el método de máxima verosimilitud ¿Es minimal suficiente el estimador de máxima verosimilitud?
   (b) (1.25) Determínese el estimador centrado uniformemente de mínima varianza para $g(\theta) = \ln \theta$
2. Sea $X$ una variable con función de densidad
$$f_\theta(x) = \frac{2\theta^2}{x^3}, \ 0 < \theta \leq x.$$
Se considera una muestra aleatoria simple de tamaño $n$,
   (a) (1.25) Encuéntrese el test de tamaño $\alpha$ que da el teorema de Neyman-Pearson para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente $H_1 : \theta = \theta_1$ con $\theta_0 < \theta_1$.
   (b) (1.25) Pruébese que
$$T(X_1, ..., X_n; \theta) = \frac{1}{\theta} \min(X_1, ..., X_n)$$
es una catidad pivotal y hállese, en base a ella, un intevalo de confianza para $\theta$ de longitud mínima.