Examen de Estadística. Grupo A
junio de 2010

1. (2 puntos) Obténgase que la expresión de la función de densidad de la χ_n^2 es

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{n}{2}-1} \qquad \text{con} \qquad x \geq 0$$

2. (2 puntos) Para m.a.s. de tamaño n de una distribución exponencial de parámetro θ con función de densidad

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \qquad \theta > 0$$

Se pide:

i) Encuéntrese la cota de FCR para $h(\theta) = \theta$.

ii) ¿Cuál es el ECMV para θ? ¿Cuánto vale su varianza?

3. (3 puntos) Para m.a.s. de tamaño n de una población $N(\theta, 1)$ y para contrastar la hipótesis nula $H_0: \theta \geq 0$ frente a la alternativa $H_1: \theta < 0$, se pide:

i)¿cuál es el test de la razón de verosimilitud de tamaño α?

ii)¿cuál es el p-valor si para una m.a.s. de tamaño 10 se observa $\bar{x} = 0$?

iii)¿cuál es el test bayesiano si la información inicial es $N(0, \sigma_0)$ con σ_0 conocida?

4. (3 puntos) Sean m.a.s. de tamaño n de una población $X \sim N(\theta, \sigma)$ con σ desconocida. Constrúyase la familia de test de la razón de verosimilitud (sin demostración) de tamaño α para contrastar $H_0: \theta = \theta_0$ frente a la alternativa $H_1: \theta < \theta_0$, al variar θ en $\mathcal{R}$. Constrúyase el intervalo de grado de confianza $1 - \alpha$ asociado mediante el procedimiento estándar.

   En el mismo contexto, si la información inicial sobre θ viene dada por la distribución inicial $N(0, \tau)$ con τ conocida, determínese el intervalo creíble de más alta probabilidad $1 - \alpha$ para θ.