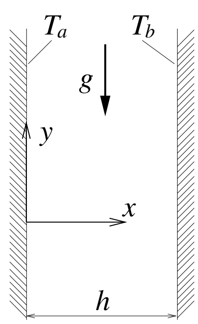
PROBLEMA 1

Un líquido **no perfecto** con coeficiente de viscosidad μ, coeficiente volumétrico de viscosidad μ_v, conductividad térmica k, y calor específico c, constantes, se encuentra confinado entre dos paredes verticales infinitamente largas separadas una distancia h, tal y como se indica en la figura adjunta. La pared de la izquierda se encuentra a una temperatura T_a, mientras que la temperatura de la pared de la derecha es T_b. Se sabe que la variación de la densidad del líquido con la temperatura responde a la ley lineal

$$\rho/\rho_o = 1 + \alpha(T_o - T)/T_o,$$

donde ρ_o es la densidad del líquido a la temperatura $T_o = (T_a + T_b)/2$ y $\alpha \ll 1$ es una constante positiva. Las variaciones de densidad que aparecen asociadas al campo de temperaturas existente en el fluido inducen un movimiento estacionario que se quiere estudiar. En particular, se pide obtener la distribución de temperatura, $T(x)$, y densidad, $\rho(x)$, así como las dos componentes de la velocidad, $u_x(x)$ y $u_y(x)$, suponiendo que todas ellas son únicamente función de la distancia a la pared de la izquierda, x. Para ello, se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. A partir de la ecuación de continuidad obtenga la componente horizontal de la velocidad u_x.
2. Demuestre que $\partial p/\partial x = 0$, y que $\partial p/\partial y = -C$ es constante.
3. Suponiendo que el efecto de la disipación viscosa es despreciable (dar un criterio para ello), determine el campo de temperaturas.
4. Obtenga la distribución de velocidad $u_y(x)$.
5. Calcule el valor de C imponiendo la condición de que el gasto másico $G = \int_0^h \rho u_y \mathrm{d}x = 0$.
6. Utilize los resultados anteriores para determinar la fuerza vertical que el fluido ejerce sobre cada una de las dos paredes por unidad de superficie.



NOTA: Las ecuaciones de conservación que describen el movimiento bidimensional estacionario de un fluido (con μ, μ_v, k y c constantes) pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = 0 \tag{1}$$

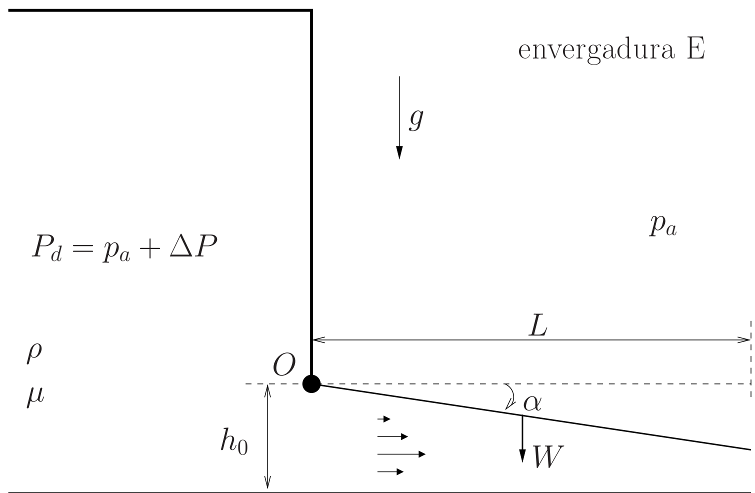
$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_{m_x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) + (\mu_v + \frac{1}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_{m_y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) + (\mu_v + \frac{1}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \tag{3}$$

$$\rho c u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c u_y \frac{\partial T}{\partial y} = -p\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \phi_v + k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

PROBLEMA 2

El depósito de la figura, de envergadura E (longitud en la dirección perpendicular al plano del dibujo), contiene líquido de densidad ρ y viscosidad μ, que se encuentra a una presión reducida $P_d = p_a + \Delta P$, siendo p_a la presión atmosférica que rodea al sistema y $\Delta P \gg \rho g h_0$ una sobrepresión constante y conocida. El líquido descarga a la atmósfera a través de una compuerta de longitud L y articulada en el punto O, a su vez situado a una distancia $h_0 \ll L$ del fondo del depósito. El peso de la compuerta por unidad de envergadura es W.



Sabiendo que los únicos datos del problema son $(\rho, \mu, g, p_a, \Delta P, E, h_0, L, W)$, se pide:

1. La sobrepresión crítica ΔP_c por debajo de la cual la compuerta permanece cerrada evitando la descarga del fluido.
2. Cuando $\Delta P > \Delta P_c$ y el líquido abandona el depósito en condiciones estacionarias, obtener la ecuación algebraica que determina implícitamente el ángulo α de equilibrio, en condiciones tales que el movimiento del fluido a lo largo del canal formado entre la compuerta y el fondo esté dominado por la viscosidad. Proporcione también el criterio de viscosidad dominante.
3. Demuestre que la solución del apartado anterior puede expresarse en forma adimensional como
$$\frac{W}{L\,\Delta P} = f\left(\frac{\alpha L}{h_0}\right),$$
halle y represente la función f, e indique cómo se obtendría el valor de α a partir de dicha gráfica. Tenga en cuenta que α puede ser tanto positivo (canal convergente) como negativo (canal divergente), en función del valor del parámetro $W/(L\,\Delta P)$.

Nota: Tenga en cuenta que se pueden usar las aproximaciones $\tan(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$ y $\cos(\alpha) \approx 1$ al suponerse que $|\alpha| \ll 1$.