Nombre: **Número de matrícula:**

- **sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.**
- **sólo se calificarán los problemas en los que se haya marcado una respuesta. Si la opción elegida es "*ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:*", la respuesta debe aparecer sobre la línea de puntos inmediatamente a continuación.**
- **sólo una respuesta es correcta.**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos.**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, no usar ningún otro papel.**
- **60 min, 0.5 puntos cada problema.**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba. Las preactas se publicarán no más tarde del día 7 de febrero y la revisión de examen será el martes 12 de febrero a las 15:30 en la sala R1.

1. El calor específico de un determinado material compuesto es $C_{p(compuesto)} = 1770\ \frac{J}{kg\cdot K}$ .Si se conocen los calores específicos y las densidades de los componentes **A** y **B**, determinar la densidad del material compuesto:

Datos: $C_{p(A)} = 2100\frac{J}{kg\cdot K}$; $C_{p(B)} = 775\frac{J}{kg\cdot K}$; $\rho_A = 870\frac{kg}{m^3}$; $\rho_B = 4050\frac{kg}{m^3}$

- $1081.5\frac{kg}{m^3}$
- $1216.8\frac{kg}{m^3}$
- $1525.3\frac{kg}{m^3}$
- $1661.8\frac{kg}{m^3}$
- $1341.2\frac{kg}{m^3}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………..…

Solución:

Dado que el calor específico de un material compuesto se puede expresar en función de los calores específicos de sus componentes,

$$C_{p\ (compuesto)} = X_A C_{p\ (A)} + X_B C_{p\ (B)}$$

los valores de fracciones másicas se obtienen de manera inmediata sustituyendo en la expresión anterior:

$$1770 = 2100X_A + 775(1 - X_A) \Longrightarrow X_A = 0.751$$

La densidad pedida será, por lo tanto,

$$\frac{1}{\rho_{compuesto}} = \frac{X_A}{\rho_A} + \frac{X_B}{\rho_B} \Longrightarrow \rho_{compuesto} = 1081.5\frac{kg}{m^3}$$

2. Se difunde galio en una oblea gruesa de germanio puro a una temperatura de 1100ºC. Si la concentración de átomos de galio en la superficie es de $5 \cdot 10^{18}\,\frac{\acute{a}tomos}{cm^3}$, transcurridas 7 horas la concentración de impurezas a una profundidad de 1µm es de $1.5 \cdot 10^{16}\,\frac{\acute{a}tomos}{cm^3}$. Sabiendo que el factor preexponencial $D_0 = 4.5 \cdot 10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$, calcular la energía de activación (en kJ/mol) para este proceso de difusión.

- $301.3\,\frac{kJ}{mol}$
- $282.6\,\frac{kJ}{mol}$
- $376.1\,\frac{kJ}{mol}$
- $226.4\,\frac{kJ}{mol}$
- $355\,\frac{kJ}{mol}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : …………………………………….…

Solución:

Aplicando la ley de Fick:

$$\frac{C_s - C_x}{C_s - C_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \Rightarrow \frac{5 \cdot 10^{18} - 1.5 \cdot 10^{16}}{5 \cdot 10^{18}} = 0.997 = erf(z) \Rightarrow z = 2.12$$

es inmediato obtener el valor de *D*:

$$z = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \Rightarrow D = 2.207 \cdot 10^{-18}\,\frac{m^2}{s}$$

La energía de activación pedida (Q) se calcula a partir de la ecuación tipo Arrhenius para el coeficiente de difusión *D*:

$$D = D_0 e^{-\frac{Q}{RT}} \Rightarrow Q = -RT\ln\frac{D}{D_0} = 376.1\,\frac{kJ}{mol}$$

3. Un determinado tipo de caucho (**C**) presenta la siguiente composición en masa: 60% de isopreno (**I**), 30% de butadieno (**B**) y el resto estireno (**S**). Si las materias primas disponibles para la obtención de este caucho son poliisopreno y dos copolímeros de estireno-butadieno (**SBR₁** y **SBR₂**), determinar las cantidades (en kg) de **SBR₁** y **SBR₂** necesarias para obtener 1000 kg de este caucho **C**.

Datos: La composición, en fracciones molares, de los copolímeros de estireno-butadieno es:

$\boldsymbol{SBR_1}: x_{S(estireno)} = 0.055;\ x_{B(butadieno)} = 0.945$

$\boldsymbol{SBR_2}: x_{S(estireno)} = 0.342;\ x_{B(butadieno)} = 0.658$

- $\boldsymbol{SBR_1}: 300\ kg; \boldsymbol{SBR_2}: 100\ kg$
- $\boldsymbol{SBR_1}: 271.8\ kg; \boldsymbol{SBR_2}: 128.2\ kg$
- $\boldsymbol{SBR_1}: 128.2\ kg; \boldsymbol{SBR_2}: 271.8\ kg$
- $\boldsymbol{SBR_1}: 118.8\ kg; \boldsymbol{SBR_2}: 181.2\ kg$
- $\boldsymbol{SBR_1}: 250.6 kg; \boldsymbol{SBR_2}: 149.4\ kg$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………..…

Solución:

De acuerdo con los datos de composición del caucho del problema, 1000kg de caucho C contienen:

- 600 kg de isopreno
- 300 kg de butadieno
- 100 kg de estireno

Por lo tanto, llamando $m_1 = masa\ del\ copolímero\ SBR_1\ y\ m_2 = masa\ del\ copolímero\ SBR_2$ se cumplirá que:

$$400 = m_1 + m_2 \qquad (1)$$

Dado que la información que proporciona el problema relativa a la composición de los copolímeros es en fracciones molares, será necesario transformarla a fracciones másicas. Conocidas las masas moleculares del butadieno ($M_B = 54\frac{kg}{kmol}$) y estireno ($M_S = 104\frac{kg}{kmol}$), la composición de los copolímeros en fracciones másicas se determina:

$$\boldsymbol{SBR_1}\begin{cases} fracción\ másica\ de\ butadieno: X_B^{SBR_1} = \dfrac{x_B M_B}{x_S M_S + x_B M_B} = 0.899 \\ fracción\ másica\ de\ estireno: X_S^{SBR_1} = 0.101 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{SBR_2}\begin{cases} fracción\ másica\ de\ butadieno: X_B^{SBR_2} = \dfrac{x_B M_B}{x_S M_S + x_B M_B} = 0.5 \\ fracción\ másica\ de\ estireno: X_S^{SBR_2} = 0.5 \end{cases}$$

Realizando un balance de masa para el butadieno, por ejemplo:

$$m_B^{compuesto} = m_B^{SBR_1} + m_B^{SBR_2} \qquad (1)$$

siendo: $m_B^{SBR_1} = m_1 X_B^{SBR_1}$ y $m_B^{SBR_2} = m_2 X_B^{SBR_2}$

Combinando las ecuaciones (1) y (2):

$$300 = 0.899 m_1 + (400 - m_1)0.5 \Rightarrow m_1 = 250.6\ kg\ de\ SBR_1$$
$$m_2 = 149.4\ kg\ de\ SBR_2$$

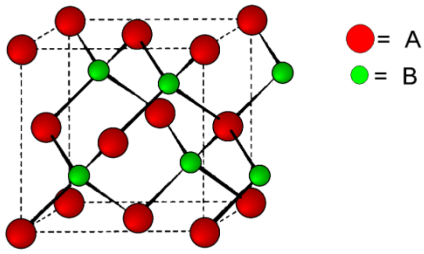
NOTA: Si el balance de masa se realiza sobre el componente estireno, la ecuación a resolver sería: $100 = 0.101 m_1 + (400 - m_1)0.5$, obteniéndose los mismos valores para m_1 y m_2.

4. La estructura cristalina de un material AB viene determinada por una red cúbica centrada en las caras y la siguiente base: átomo A en el punto de coordenadas (0,0,0) y átomo B en el punto de coordenadas $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, siendo los átomos A y B tangentes. Calcular la densidad (kg/m^3) del material cristalino.
Datos: $r_A = 1.28 \cdot 10^{-10}\, m$; $r_B = 1.05 \cdot 10^{-10}\, m$; $M_A = 78\, \frac{kg}{kmol}$; $M_B = 112\, \frac{kg}{kmol}$

- $5.71 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}$
- $1.29 \cdot 10^4\ \frac{kg}{m^3}$
- $4.41 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}$
- $8.10 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}$
- $1.14 \cdot 10^4\ \frac{kg}{m^3}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………..…

Solución:

La estructura cristalina resultante de combinar una red de puntos FCC con la base formada por los átomos **A** (0,0,0) y **B** $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ es tipo *blenda de cinc*, con los átomos **A** ocupando los vértices y centros de caras de la celdilla y los átomos **B** la mitad de los huecos tetraédricos: (ver fichero 08.01.01)

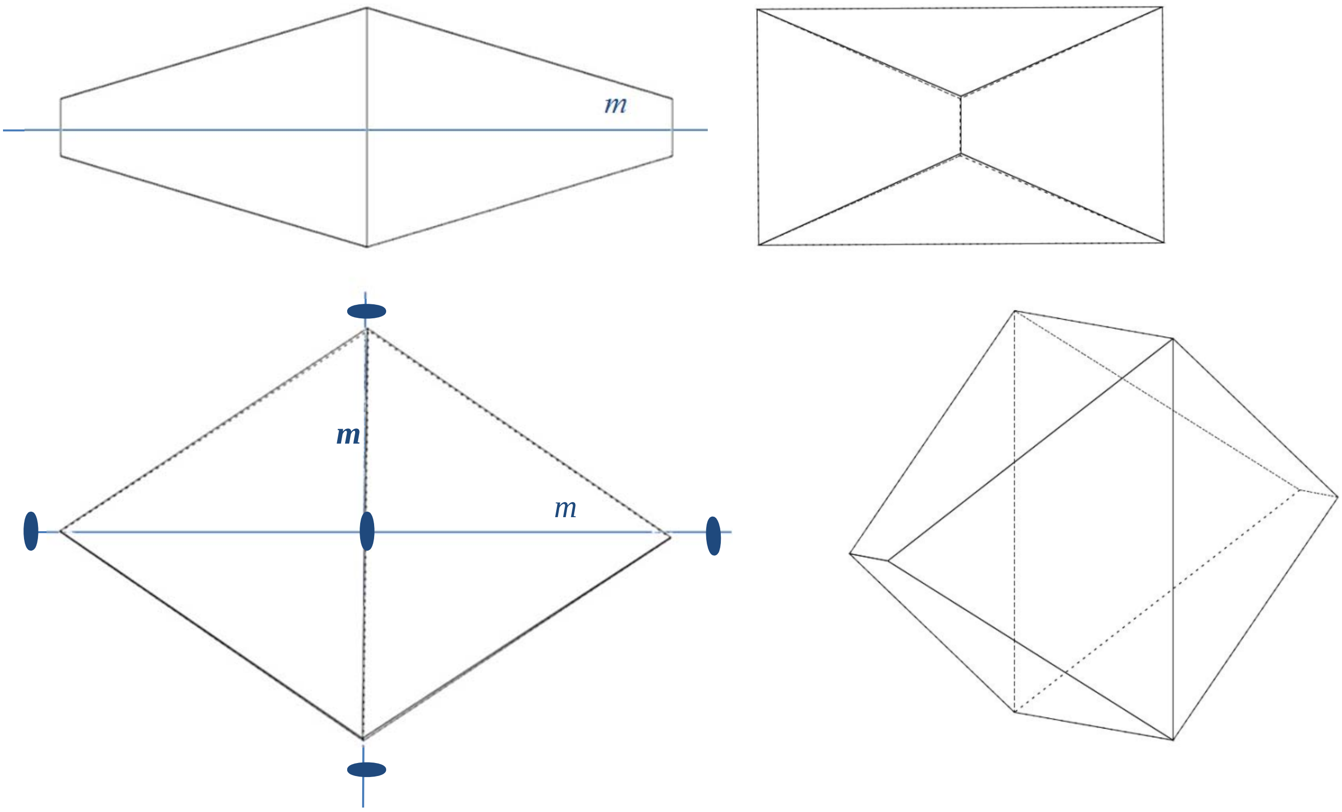


La densidad del material se calcula fácilmente sabiendo que la celda contiene 4 átomos de **A** y 4 átomos de **B**, y que la arista de la celda se determina a partir de los radios atómicos según la expresión:

$$a = \frac{4(R_A + R_B)}{\sqrt{3}}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4\frac{(M_A + M_A)}{N_A}}{a^3} = \frac{4 \times \frac{(78+112)}{6.023 \cdot 10^{26}}}{\left(\frac{4(1.28 \cdot 10^{-10} + 1.05 \cdot 10^{-10})}{\sqrt{3}}\right)^3} = 8099\,\frac{kg}{m^3}$$

5. Determinar a qué clase cristalográfica pertenece el siguiente monocristal de un material cerámico:



- $\bar{4}$
- $2/m$
- $\bar{4}2m$
- mmm
- $mm2$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………..…

Solución:

Tres ejes binarios, tres planos de simetría, centro de inversión.
Clase: mmm

6. Las componentes del tensor conductividad eléctrica para un determinado monocristal referidas a un sistema de ejes no coincidente con los ejes convencionales son:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-6}\Omega^{-1}m^{-1}$$

Determinar razonadamente la clase cristalográfica:

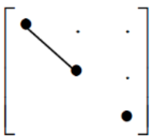
- $\infty\infty m$
- $\bar{1}$
- $mm2$
- $3m$
- $2/m$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: ……………………………………..…

Solución:

Al diagonalizar la matriz,

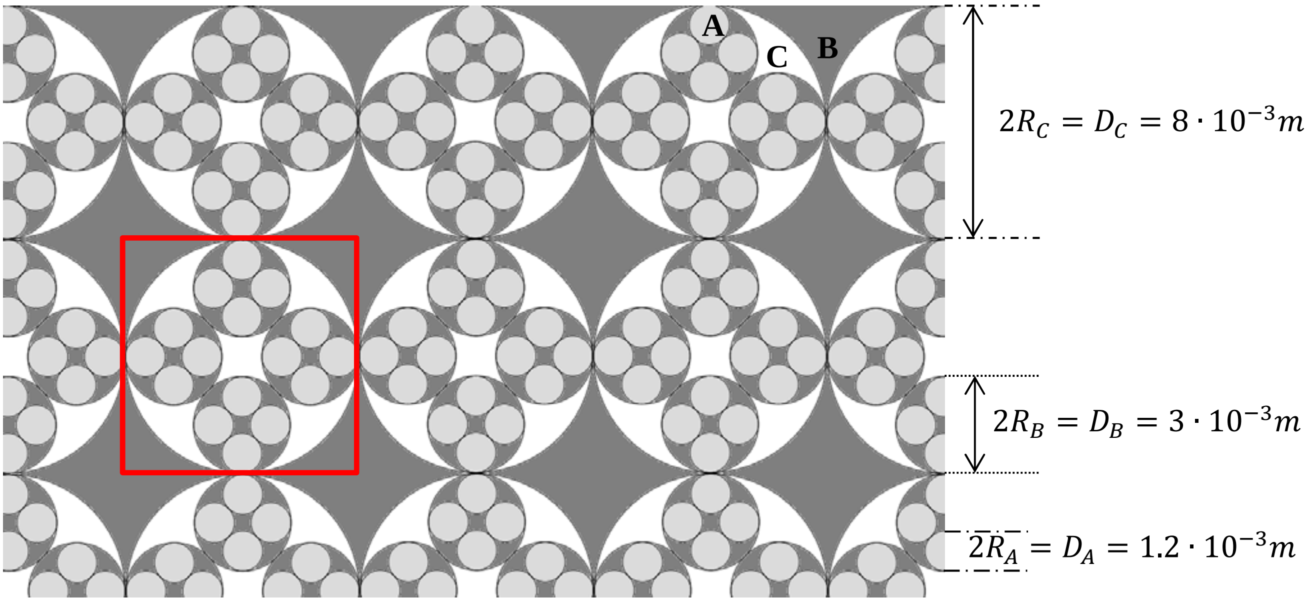
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 3;\ \lambda_3 = -1;$$

se obtiene que la estructura de la matriz en los ejes convencionales es del tipo:



por lo que el material podría ser de la clase *3m* (sistema trigonal). (ver fichero 02_01_02)

7. Un material compuesto está formado por tres materiales: **A** (gris claro en la figura), **B** (gris oscuro) y **C** (blanco), organizados en forma de fibras cilíndricas y que se disponen en el interior de una matriz del material **B** tal como indica la figura. La figura representa la sección del material compuesto transversal a los ejes de las fibras. Si se conocen los radios (diámetros) de las fibras y las conductividades de cada material, determinar la conductividad eléctrica del material compuesto en la dirección de las fibras.
Datos: $\sigma_A = 5 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$; $\sigma_B = 2 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$; $\sigma_C = 3 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$
El dibujo no está realizado a escala.



- $2.34 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$
- $1.25 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$
- $3.19 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$
- $3.89 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$
- $2.80 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: ……………………………………..

Solución:

La conductividad del material compuesto se calcula aplicando la regla de mezclas de Voigt (isogradiente):

$$\sigma_{compuesto} = V_A \sigma_A + V_B \sigma_B + V_C \sigma_C$$

Es necesario conocer las fracciones volumétricas de A, B y C. Si se elige como motivo el indicado en la figura, se observa que:

$$S_{total} = S_{cuadrado} = (2R_C)^2$$

$$V_A = \frac{S_A}{S_{total}} = \frac{16\Pi \left(\frac{D_A}{2}\right)^2}{(2R_C)^2} = 0.283$$

$$V_C = \frac{S_C}{S_{total}} = \frac{\pi \left(\frac{D_C}{2}\right)^2 - 4\pi \left(\frac{D_B}{2}\right)^2}{(2R_C)^2} = 0.344$$

$$V_B = 1 - V_A - V_C = 0.373$$

Por tanto:

$$\sigma_{compuesto} = V_A \sigma_A + V_B \sigma_B + V_C \sigma_C = 3.19 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$$

8. Determinar el valor de la componente d_{213} del módulo piezoeléctrico de un monocristal de material cerámico que sólo se polariza cuando se somete a esfuerzos cortantes.
   Datos: $d_{14} = 3 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{N}$; $d_{36} = 0$

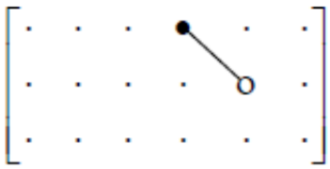
- $-3 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{N}$
- $-6 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{N}$
- $3 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{N}$
- $1.5 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{N}$
- $-1.5 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{N}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………..…

Solución:

La componente pedida se calcula como

$$d_{213} = \frac{d_{25}}{2}$$

y para conocer el valor de d_{25}, a partir de los datos proporcionados, es necesario conocer la estructura de la propiedad. Solo es posible esta estructura:



por lo que $d_{213} = \frac{d_{25}}{2} = -\frac{d_{14}}{2} = -1.5 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{N}$

diag. triang.

Problema 1

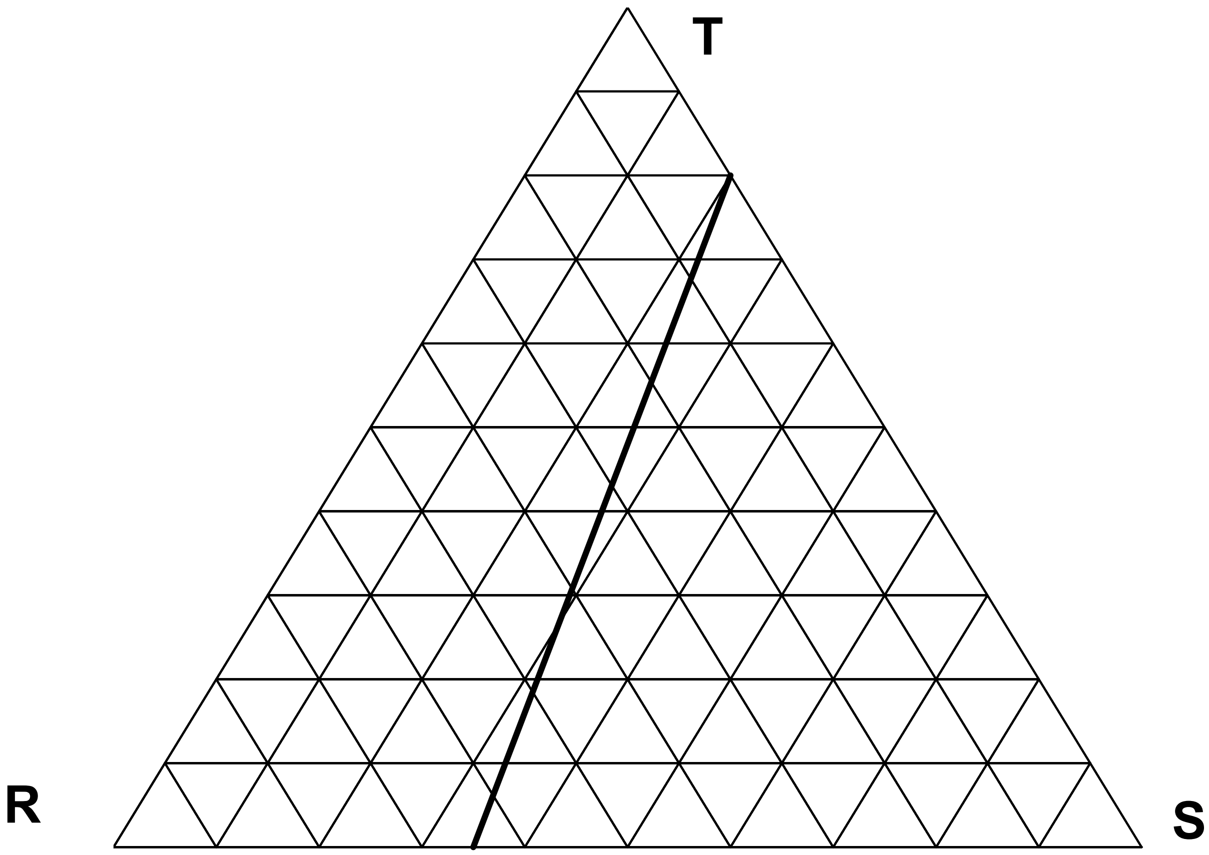
Nombre: **Número de matrícula:**

Para las soldaduras de circuitos integrados se usa un compuesto **A** de cobre, plata y oro. Este compuesto se fabrica a partir de una aleación equimolar de plata y cobre AgCu (**R**), una aleación equimolar de cobre y oro, CuAu (**S**), y una aleación equimolar de oro y plata AuAg (**T**). Las masas atómicas de los elementos son $Mw_{Ag} = 107.9$, $Mw_{Au} = 197$ y $Mw_{Cu} = 63.55$ kg/kmol. Los precios y las densidades de **R**, **S** y **T** son $p_R = 1023$, $p_S = 5626$, $p_T = 3783$ €/kg; $\rho_R = 10770$, $\rho_S = 13230$ $\rho_T = 13925$ kg/m^3.

- por cuestión de precio, la composición másica de **A** no puede encontrarse a la derecha de la línea dibujada en el diagrama triangular (diagrama en fracciones másicas) de la figura.
- la segunda especificación es que el contenido (fracción másica) de oro en **A** sea $S2 = 0.53$.

Determinar:

1. la composición (en fracciones másicas de cobre, plata y oro) de **A** que tiene precio (€/kg) mínimo.
2. el precio de **A**.
3. la densidad de **A**.



(3 puntos, 45 minutos)

Si partimos de 1 kg de A (de composición en fracciones másicas X_S, X_T y $X_R = 1 - X_S - X_T$) la masa de Au en 1 kg de masa total de A (que es la especificación S2) es:

$$X_{Au} = X_S \frac{Mw_{Au}}{Mw_S} + X_T \frac{Mw_{Au}}{Mw_T} = S2$$

Si consideramos la fracciones másicas de S (X_S) y de T (X_T) como variables, esta especificación es la ecuación de una recta en el diagrama triangular de vértices R, S y T. El compuesto A se encontrará en el punto de corte de esta recta que representa la especificación S2 y la línea dada. Un modo sencillo de representar la recta de especificación S2 es determinar dos puntos P1 y P2 que pertenezcan a ella, por ejemplo los cortes con los ejes (lados del triángulo) de $X_T = 0$ y $X_S = 0$:

Para $X_{T\_P1} = 0$ se obtiene: $X_{T\_P1} = 0$ $\quad X_{S\_P1} = \frac{S2 \cdot Mw_S}{Mw_{Au}}$ $\quad X_{S\_P1} = 0.701$

Para $X_{S\_P2} = 0$ se obtiene: $X_{S\_P2} = 0$ $\quad X_{T\_P2} = \frac{S2 \cdot Mw_T}{Mw_{Au}}$ $\quad X_{T\_P2} = 0.82$

Uniendo estos dos puntos se obtiene la línea de trazos en la figura. Del punto de intersección de las dos rectas se lee directamente la composición del compuesto:

$X_S = 0$ $\quad X_T = 0.82$ $\quad X_R = 1 - X_S - X_T$

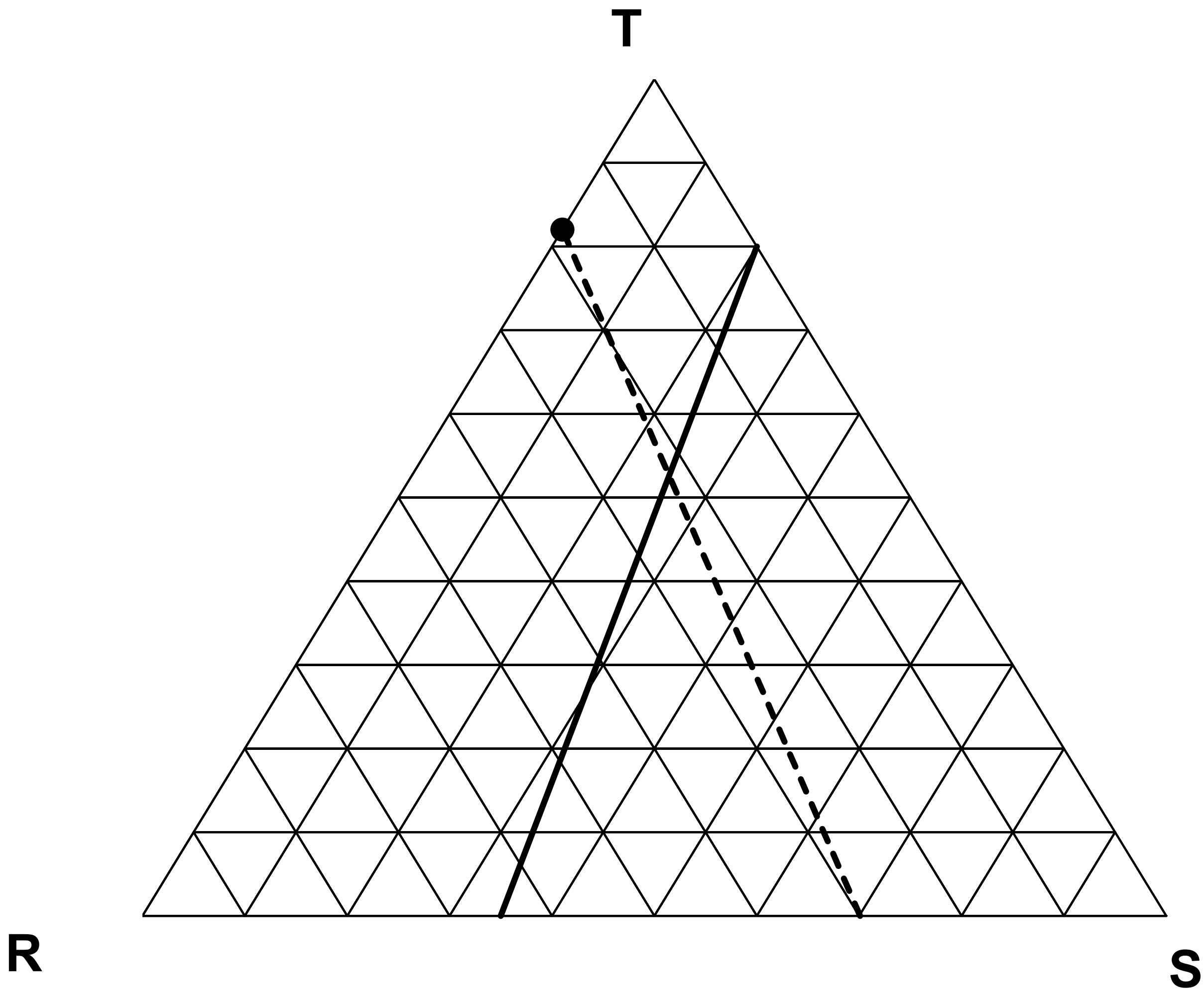
$X_R = 0.18$

y la fracción másica de Cu en A es: $X_S \cdot \frac{Mw_{Cu}}{Mw_S} + X_R \cdot \frac{Mw_{Cu}}{Mw_R} = 0.067$

Se puede verificar que se cumple la especificación (la fracción másica de Au debe ser $S2 = 0.53$):

$$X_S \cdot \frac{Mw_{Au}}{Mw_S} + X_T \cdot \frac{Mw_{Au}}{Mw_T} = 0.53$$

y por último la fracción másica de Ag en A es: $X_T \cdot \frac{Mw_{Ag}}{Mw_T} + X_R \cdot \frac{Mw_{Ag}}{Mw_R} = 0.403$



Conocida la composición en fracciones másicas, como los precios también son por unidad de masa, el precio de A es directamente:

$$X_R \cdot p_R + X_S \cdot p_S + X_T \cdot p_T = 3287$$ €/kg de A

La densidad del compuesto expresada en términos de fracciones másicas es:

$$\left(\frac{X_R}{\rho_R} + \frac{X_S}{\rho_S} + \frac{X_T}{\rho_T}\right)^{-1} = 13229$$ kg/m^3

Problema 2

Nombre: **Número de matrícula:**

Se desea construir un acelerómetro piezoeléctrico para ensayos destructivos de colisión de vehículos (ver esquema, parte A). El sensor, de masa m, va montado sobre el techo del vehículo y tiene forma prismática tal y como se indica en la parte B del esquema. Para asegurar un estado de tensión homogéneo en todo el sensor, se coloca sobre él una masa inerte m_I mucho mayor que la masa m del sensor.

Se dispone de un material cuyos módulos piezoeléctricos, referidos al sistema de coordenadas cartesianas convencionales del sensor (figura B), son conocidos:

$$d_{113} = d_{131} \qquad d_{311} \qquad d_{333}$$
$$d_{223} = d_{232} \qquad d_{322}$$

y el resto de los módulos son nulos.

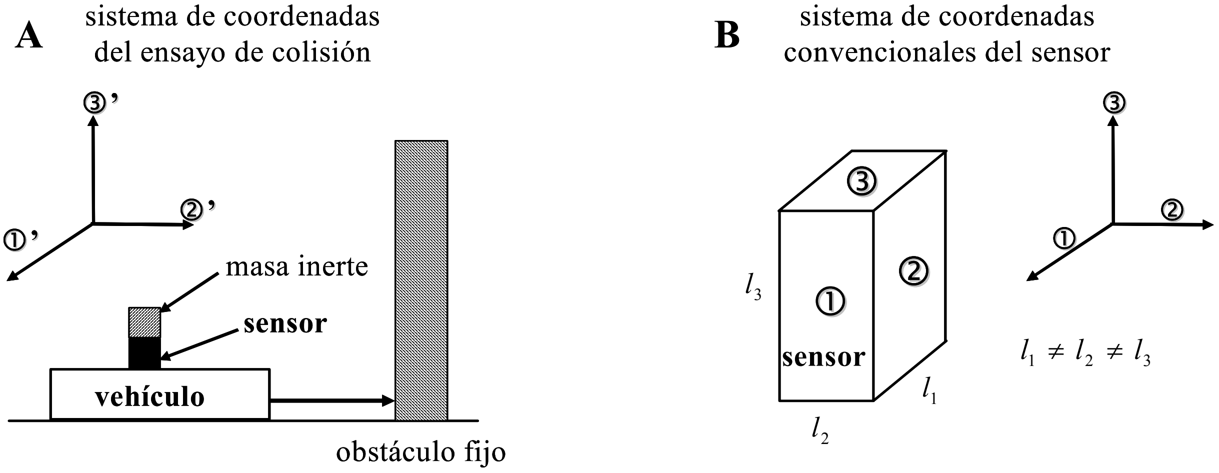
1. Razonar a qué clase cristalográfica puede pertenecer el material.

2. Despreciando la tensión mecánica debida al propio peso del sensor y al de la masa inerte, indicar de qué modo o modos, en caso de haber más de uno, hay que orientar el sensor para que se obtenga una señal eléctrica durante la colisión del vehículo, e indicar entre qué caras del sensor se medirá dicha señal.
Para cada modo de orientación indicar qué esfuerzo aparece sobre el sensor y decir, para los tres ejes, qué eje del sistema de referencia B se hace coindidir con qué eje del sistema de referencia A.

3. Calcular la señal o señales obtenidas en el punto anterior como diferencia de potencial y expresarla/s en función exclusivamente de las siguientes variables: m, masa del sensor; m_I, masa inerte sobre el sensor; a_i, aceleración en dirección i del sistema de referencia del sensor; l_1, l_2, l_3 , dimensiones del sensor; d_{ijk} módulos piezoeléctricos del material en notación tensorial; κ_{11}, κ_{22} , κ_{33}, constantes dieléctricas relativas de material y ε_0, permitividad dieléctrica del vacío.

4. Calcular las componentes de la polarización del sensor (momento dipolar por unidad de volumen) para todos los casos anteriores, si se considera además la tensión mecánica debida al peso del sensor y al de la masa inerte.

(3 puntos, 45 minutos)



Sol.: a la vista de los módulos piezoeléctricos, el material es de la clase: $mm2$
y le corresponde la estructura de la matriz de módulos piezoeléctricos:

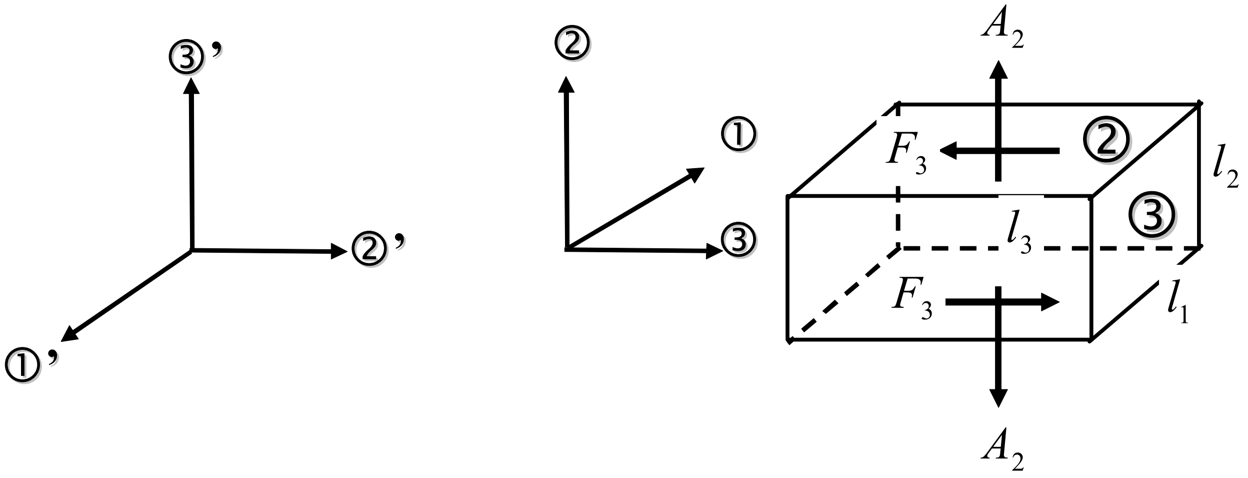
$$str\left(\underset{\sim}{d}\right)=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Durante la colisión del vehículo, despreciando la tensión mecánica debida al propio peso del sensor y al de la masa inerte, el sensor va a estar sometido a un esfuerzo cortante. La presencia de la gran masa inerte sobre el sensor, asegura que tengamos un problema homogéneo.
Viendo la matriz de módulos piezoeléctricos, hay dos posibilidades para que el sensor se polarice ante un esfuerzo cortante: ante un esfuerzo τ_4 o ante un esfuerzo τ_5, en Notación de Voigt:

$$\underline{P}=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{24} & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_4 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdot \\ d_{24}\tau_4 \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad \underline{P}=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{24} & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_5 \\ \cdot \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_{15}\tau_5 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

En el primer caso, ante un esfuerzo τ_4, o τ_{23} en notación tensorial, tenemos que orientar el sensor haciendo coincidir la dirección 3 del sensor con la dirección 2' del ensayo de colisión y, por ejemplo , la dirección 2 del sensor con la 3' y la dirección 1 del sensor con la dirección -1':

sistema de coordenadas del ensayo de colisión | **sistema de coordenadas convencionales del sensor**



Existe una fuerza en dirección 3 del sensor, debida a una aceleración a_3, por unidad de superficie cuya normal exterior es la dirección -2, y como es un sólido será por tanto un esfuerzo τ_{23} positivo. La polarización sólo tiene componente 2; la señal se medirá entre las caras 2 del sensor.

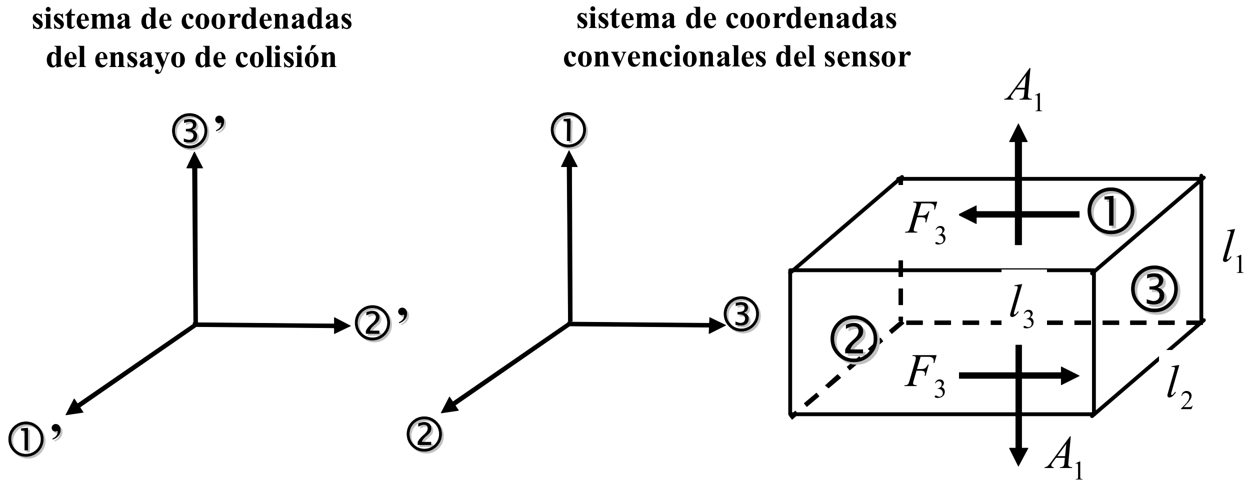
La polarización del sensor o momento dipolar por unidad de volumen (C m/m^3), será:

$$\tau_{23} = \frac{(m+m_I)a_3}{l_1 l_3} \quad \Rightarrow \quad P_2 = d_{24}\tau_4 = 2d_{223}\frac{(m+m_I)a_3}{l_1 l_3}$$

Y la diferencia de potencial entre las caras 2 del sensor se calcula, considerando el sensor como un condensador de placas planas paralelas, con una constante dieléctrica κ_{22} (ver propiedades de 2º ord para la clase *mm* 2):

$$\Delta V_2 = \frac{2d_{223}\dfrac{(m+m_I)a_3}{l_1 l_3}\dfrac{l_1 l_2 l_3}{l_2}}{\varepsilon_0 \kappa_{22}\dfrac{l_1 l_3}{l_2}} \qquad \boxed{\Delta V_2 = \frac{2d_{223}(m+m_I)a_3 l_2}{\varepsilon_0 \kappa_{22} l_1 l_3}}$$

En el segundo caso, ante un esfuerzo τ_5, o τ_{13} en notación tensorial, tenemos que orientar el sensor haciendo coincidir la dirección 3 del sensor con la dirección 2' del ensayo de colisión y, por ejemplo, la dirección 2 del sensor con la 1' y la dirección 1 del sensor con la dirección 3'. Existe una fuerza en dirección 3 del sensor, debida a una aceleración a_3, por unidad de superficie cuya normal exterior es la dirección -1, y como es un sólido será por tanto un esfuerzo τ_{13} positivo:



La señal se medirá entre las caras 1 del sensor.
La polarización del sensor o momento dipolar por unidad de volumen (C m/m^3), será:

$$\tau_{13} = \frac{(m+m_I)a_3}{l_2 l_3} \quad \Rightarrow \quad P_1 = d_{15}\tau_5 = 2d_{113}\frac{(m+m_I)a_3}{l_2 l_3}$$

Y la diferencia de potencial entre las caras 1 del sensor se calcula análogamente, pero ahora la constante dieléctrica en dirección 1 es κ_{11}, que para un material ortorrómbico es distinta de la usada en el caso anterior:

$$\Delta V_1 = \frac{2d_{113}\dfrac{(m+m_I)a_3}{l_2 l_3}\dfrac{l_1 l_2 l_3}{l_1}}{\varepsilon_0 \kappa_{11}\dfrac{l_2 l_3}{l_1}} \qquad \boxed{\Delta V_1 = \frac{2d_{113}(m+m_I)a_3 l_1}{\varepsilon_0 \kappa_{11} l_2 l_3}}$$

Si ahora tenemos en cuenta el peso del sensor y el de la masa inerte, habrá una nueva componente del esfuerzo en cada caso. En el primero, ante un esfuerzo τ_4 , tendremos además un nuevo esfuerzo de compresión (negativo) τ_2(ver orientación del sensor):

$$\tau_2 = \tau_{22} = \frac{(m + m_I)\, g}{l_1 l_3}$$

y el vector polarización tiene dos componentes; P_2 que permitiría medir una diferencia de potencial entre caras 2 del sensor, como antes, y la nueva P_3 con la que mediríamos otra diferencia de potencial distinta entre caras 3 del sensor:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{24} & \cdot & \cdot \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \tau_2 \\ \cdot \\ \tau_4 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ d_{24}\tau_4 \\ d_{32}\tau_2 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = d_{24}\tau_4 = 2d_{223}\frac{(m + m_I)\, a_3}{l_1 l_3}$$

$$P_3 = d_{32}\tau_2 = d_{322}\frac{(m + m_I)\, g}{l_1 l_3}$$

En el segundo caso, ante un esfuerzo τ_5 , y con la orientación correspondiente del sensor, tendremos además un esfuerzo de compresión (negativo) τ_1:

$$\tau_1 = \tau_{11} = \frac{(m + m_I)\, g}{l_2 l_3}$$

y el vector polarización tiene también dos componentes, P_1 y P_3:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{24} & \cdot & \cdot \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_5 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{15}\tau_5 \\ \cdot \\ d_{31}\tau_1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = d_{15}\tau_5 = 2d_{113}\frac{(m + m_I)\, a_3}{l_2 l_3}$$

$$P_3 = d_{31}\tau_1 = d_{311}\frac{(m + m_I)\, g}{l_2 l_3}$$