5000017 ELECTROMAGNETISMO Examen del 5 de junio de 2013. Primera parte. Publicación de notas: 19 de junio de 2013.

Apellidos:____________________________________ **Nombre:**______________________ **Matrícula:**________________

Ajuste su respuesta al espacio disponible y escriba el resultado en el recuadro. Se considerarán correctas únicamente las respuestas en las que lo sean la solución y los cálculos indicados para su obtención a partir de los datos del enunciado.

1. Sea un condensador cilíndrico de radios $a, 2a$ y altura $L \gg a$; el espacio entre sus armaduras se encuentra relleno por un dieléctrico de susceptibilidad χ_e. Las placas del condensador se conectan a una fuente de tensión continua V, de modo que $V_{\text{int}} - V_{\text{ext}} = V$. Obtenga el módulo de la polarización en un punto del dieléctrico situado a una distancia $\frac{3a}{2}$ del eje del condensador.

   En el interior del condensador, por simetría, se tiene un campo eléctrico radial que sólo puede depender de ρ, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(\rho)\boldsymbol{u}_\rho$. Al aplicar el teorema de Gauss sobre superficies cilíndricas de radio ρ y eje z, se tiene que

   $$2\pi\rho E(\rho) = \text{cte.} \Rightarrow E = \frac{K}{\rho} \Rightarrow V = V_{\text{int}} - V_{\text{ext}} = K\int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = K\,\ln 2 \Rightarrow K = \frac{V}{\ln 2}$$

   y por lo tanto,

   $$\boldsymbol{E} = \frac{V}{\rho\,\ln 2}\boldsymbol{u}_\rho$$

   con lo que $\boxed{P = \frac{2\chi_e \epsilon_0 V}{3a\ln 2}}$

2. La curva de imanación de un material magnético para el intervalo $|B| \le B_0$ está dada por la expresión $H(B) = aB^3$. Determine la densidad de energía por unidad de volumen que hay que aportar para aumentar la inducción magnética desde $B = 0$ hasta $B = B_1$ $(0 \le B_1 \le B_0)$.

   Aplicamos la ecuación directamente

   $$u = \int_0^{B_1} H\mathrm{d}\,B \Rightarrow \boxed{u = \frac{a}{4}B_1^4}$$

3. Dos materiales dieléctricos LHI: κ_1, κ_2, de susceptibilidades $\chi_1 = 3, \chi_2 = 7$ están separados por una superficie plana. El campo eléctrico en un punto del dieléctrico κ_1 próximo a la superficie de separación forma un ángulo con la normal α_1 cuya tangente es $\tan\alpha_1 = \frac{5}{14}$. Halle la tangente del ángulo que forma con la normal el campo eléctrico en un punto de κ_2 justo al otro lado de la superficie de separación.

   Aplicamos la continuidad de la componente normal de $\epsilon\boldsymbol{E}$ y la tangencial de $\boldsymbol{E}$, en la cadena:

   $$\tan\alpha_2 = \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = \frac{E_{t1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2\,E_{t1}}{\epsilon_1\,E_{n1}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\tan\alpha_1 = \frac{1+\chi_2}{1+\chi_1}\tan\alpha_1$$

   $\boxed{\tan\alpha_2 = \frac{8}{4}\frac{5}{14} = \frac{5}{7}}$

4. Se tiene un sistema de tres superficies esféricas E_1, E_2, E_3 concéntricas y conductoras, de radios R, $5R$, $10R$. Obtenga el elemento C_{12} de la matriz de capacidad.

   Para obtener este elemento, ponemos a cero el potencial de los conductores E_2 y E_3 y a un potencial V el conductor E_1; obtendremos la carga Q_2 en E_2 y $C_{12} = C_{21} = \frac{Q_2}{V}$. El potencial V en E_1 está determinado por:

   $$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

   pero $V_2 = V_3 \Rightarrow Q_3 = 0$ y $V_3 = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ por lo que $Q_2 = -Q_1$ y $\boxed{C_{12} = -4\pi\epsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} = -5\pi\epsilon_0 R}$

5. Determine, para el sistema anterior, el elemento C_{13} de la matriz de capacidad.

   Por lo que se ha desarrollado en la anterior cuestión, o por ser E_2 una pantalla electrostática,

   $\boxed{C_{13} = 0}$

6. Una corriente I constante circula por un conductor que se devana en torno a un cilindro de revolución de radio R y altura infinita, relleno de un material LHI con susceptibilidad magnética χ_m. El conductor se dispone en forma de hélice circular de paso $p \ll R$. Halle el módulo de la inducción magnética ($|\boldsymbol{B}|$) en el centro de la sección.

   Por la simetría de la distribución de corrientes sabemos que el campo es axial; aplicando el teorema de Ampere tenemos

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{I}{p}$$

   y por consiguiente, $\boxed{|\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0 (1+\chi_m) I}{p}}$

7. Se tiene un sistema de dos conductores: C_1, C_2, donde C_2 puede girar en torno a un eje fijo z y α es el ángulo asociado a dicha rotación. La matriz de capacidad es

$$C = \begin{pmatrix} A & -B\cos\alpha \\ -B\cos\alpha & A \end{pmatrix}$$

   donde A, B son constantes positivas conocidas. Determine la componente N_z del momento áxico en z de las fuerzas que el campo electrostático ejerce sobre C_2 cuando los conductores se sitúan a los potenciales V_1, V_2.

   Obtenemos el momento a partir de la energía U, según

$$N_z = \left.\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right|_{V_i}$$

   con lo que

$$U = \frac{1}{2}A(V_1^2 + V_2^2) - BV_1V_2\cos\alpha \Rightarrow \boxed{N_z = BV_1V_2 \operatorname{sen}\alpha}$$

8. La profundidad pelicular a una frecuencia ω en un buen conductor es δ_ω; ¿cuál será la profundidad pelicular $\delta_{\omega'}$ a una frecuencia $\omega' = \omega/25$? (puede suponer que $\sigma \gg \epsilon\omega$).

   A partir de las ecuaciones de Maxwell para ondas planas con amplitudes complejas $\left\{\begin{array}{rcl} i\boldsymbol{k}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} & = & 0 \\ i\boldsymbol{k}\times\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} & = & i\omega\mu\,\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} \\ i\boldsymbol{k}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} & = & 0 \\ i\boldsymbol{k}\times\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} & = & (\sigma - i\omega\epsilon)\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \approx \sigma\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \end{array}\right.$,al multiplicar la última por $\boldsymbol{k}$ y utilizar la segunda y tercera,

$$k^2\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} \approx i\omega\mu\sigma\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}(1+i)$$

   de modo que la inversa de la componente imaginaria (profundidad pelicular) queda

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$$

   y se deduce que δ escala con $\omega^{-1/2}$ lo cual implica que

$$\delta_{\omega'} = 5\delta_\omega$$

9. Determine el vector de Poynting en una onda electromagnética circularmente polarizada cuando el campo eléctrico es

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = E_0[\cos(\omega t - \omega\frac{z}{c})\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}(\omega t - \omega\frac{z}{c})\boldsymbol{j}]$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0[\cos(\omega t - \omega\frac{z}{c})\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}(\omega t - \omega\frac{z}{c})\boldsymbol{i}]$$

   con lo que $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}(x,y,z,t)\times H(x,y,z,t)$ queda

$$\boldsymbol{S}(x,y,z,t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2[\cos^2(\omega t - \omega\frac{z}{c})\boldsymbol{u}_z + \operatorname{sen}^2(\omega t - \omega\frac{z}{c})\boldsymbol{u}_z]$$

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\boldsymbol{u}_z}$$

10. Una onda electromagnética linealmente polarizada con un campo eléctrico de amplitud E_0 incide sobre una superficie dieléctrica de índice de refracción n según el *ángulo de Brewster*. La onda se encuentra linealmente polarizada en el plano de incidencia. Determine la amplitud del campo eléctrico de la onda reflejada.

    Pues cero por definición.