DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Dobles Grados en Matemáticas y Física y Matemáticas e Informática
Análisis de variable real. Curso 11-12
Segundo Parcial. 15 de junio de 2012

1. **(1.5 puntos)** Para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada,

   a) Define: partición de $[a, b]$, suma superior y suma inferior de Riemann.

   b) Enuncia 3 propiedades de estos conceptos que llevan a la definición de funcion integrable Riemann.

   c) Enuncia dos clases de funciones que sean integrables Riemann.

2. **(2 puntos)** Enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

3. **(1.5 punntos)** Sobre un terrenos de forma elíptica de semiejes $a \geq b > 0$ (medidos en metros) se levantan las paredes de un pabellón de deportes de altura H. La cubierta se realiza con semicircunferencias cuyo plano es perpendicular al semieje mayor de la base.

   a) Calcular el volumen del pabellón y la altura máxima de la cubierta.
   Indicación: El área de la elipse es: πab

   b) Si el área de la base del pabellón y la altura de las predes se mantienen constantes, calcular las medidas necesarias para que el volumen sea máximo y hallar dicho volumen.

4. **(1.5 puntos)** Estudia la convergencia de la integral impropia

$$\int_2^\infty \frac{1}{t^a \left(\ln(t)\right)^b}\, dt$$

   con $a, b \geq 0$

5. **(1 punto)** Usando el teorema de Taylor, escribe el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ en potencias de $x - 1$.

6. **(1 punto)** Estudia la convergencia uniforme de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} 2^{-n}, \qquad x \in \mathbb{R}$

7. **(1.5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y 2π-periódica.

   a) Probar que la derivada de f es 2π-periódica.

   b) Supongamos que f' es continua. Prueba que si $a_n(f), b_n(f)$, y $a_n(f'), b_n(f')$ representan los coeficientes de Fourier de f y f' respectivamente, entonces

$$a_0(f') = 0, \quad a_n(f') = nb_n(f), \quad b_n(f') = -na_n(f)$$

   c) Concluye que si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f')|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f')|^2 < \infty$ entonces la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$.