RESOLUCIÓN POSIBLE para la Segunda Parte

1) Aplicando la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}S = \iiint_\tau \varkappa \, \mathrm{d}\tau$$

y teniendo en cuenta la simetría central del problema se puede determinar el vector desplazamiento en los distintos puntos del espacio.

Para $0 < r < R_2$ la única carga libre es q, por tanto,

$$D \, 4\pi r^2 = q \Rightarrow \boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \, \mathbf{u}_r$$

Para $r > R_2$, la carga libre es q y la que se encuentra distribuida con densidad superficial σ sobre la superficie exterior de la corona esférica, así

$$D \, 4\pi r^2 = q + \sigma \, 4\pi R_2^2 \Rightarrow \boldsymbol{D} = \left(\frac{q}{4\pi r^2} + \sigma \, \frac{R_2^2}{r^2} \right) \mathbf{u}_r$$

En el vacío, el campo eléctrico se relaciona con el desplazamiento mediante $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ y en la corona dieléctrica $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$. Obteniéndose,

$0 < r < R_1$	$\boldsymbol{D} = \dfrac{q}{4\pi r^2} \, \mathbf{u}_r$	$\boldsymbol{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \mathbf{u}_r$
$R_1 < r < R_2$	$\boldsymbol{D} = \dfrac{q}{4\pi r^2} \, \mathbf{u}_r$	$\boldsymbol{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \, \mathbf{u}_r$
$r > R_2$	$\boldsymbol{D} = \left(\dfrac{q}{4\pi r^2} + \sigma \, \dfrac{R_2^2}{r^2} \right) \mathbf{u}_r$	$\boldsymbol{E} = \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \sigma \, \dfrac{R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} \right) \mathbf{u}_r$

2) A partir del campo eléctrico, y en virtud de la simetría central existente, se cumple que $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \, \mathbf{u}_r$.

Comenzando por la zona exterior ($r > R_2$) para imponer la condición de regularidad en el infinito,

$$V(r) = -\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} + \sigma \, \frac{R_2^2}{\varepsilon_0} \right) \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} + \sigma \, \frac{R_2^2}{\varepsilon_0} \right) \frac{1}{r} + C_3$$

siendo $C_3 = 0$ por regularidad en el infinito.

Para los puntos de la corona ($R_1 < r < R_2$)

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \int \mathrm{d}r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \, r + C_2$$

La continuidad del potencial en la superficie $r = R_2$ determina la constante

$$\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}+\sigma\,\frac{R_2^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{R_2}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,R_2+C_2\Rightarrow C_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\left(1+\frac{R_2^2}{a}\right)+\sigma\,\frac{R_2}{\varepsilon_0}$$

En puntos de la esfera interior ($0<r<R_1$)

$$V(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+C_1$$

y

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+C_1=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,R_1+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\left(1+\frac{R_2^2}{a}\right)+\sigma\,\frac{R_2}{\varepsilon_0}$$

es decir,

$$C_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,(R_2-R_1)-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$$

En resumen,

$$\boxed{\begin{array}{rcll}
V(r) & = & \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,(R_2-R_1)-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)+\dfrac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} & (0<r<R_1)\\
V(r) & = & -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,r+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\left(1+\dfrac{R_2^2}{a}\right)+\sigma\,\dfrac{R_2}{\varepsilon_0} & (R_1<r<R_2)\\
V(r) & = & \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}+\sigma\,\dfrac{R_2^2}{\varepsilon_0}\right)\dfrac{1}{r} & (R_2<r)
\end{array}}$$

3) El vector polarización es nulo en todo punto salvo en los puntos de la corona donde se encuentra el dieléctrico, teniéndose

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\left(\frac{a}{r^2}-1\right)\frac{q}{4\pi a}\,\mathbf{u}_r$$

$$\boxed{\begin{array}{rcll}
\boldsymbol{P} & = & \mathbf{0} & (0<r<R_1)\\
\boldsymbol{P} & = & \dfrac{q}{4\pi a}\left(\dfrac{a}{r^2}-1\right)\mathbf{u}_r & (R_1\leq r\leq R_2)\\
\boldsymbol{P} & = & \mathbf{0} & (R_2<r)
\end{array}}$$

4) La densidad superficial de carga de polarización está dada por $\sigma_p=\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{n}$, siendo $\mathbf{n}$ la normal exterior, y la densidad volumínica por $\varkappa_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$. Por tanto,

$$\sigma_p(R_1)=-\boldsymbol{P}(R_1)\cdot\mathbf{u}_r\qquad\sigma_p(R_2)=\boldsymbol{P}(R_2)\cdot\mathbf{u}_r$$

Y al ser el campo central

$$\varkappa_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\,\frac{q}{4\pi a}\left(\frac{a}{r^2}-1\right)\right]$$

.

Resumiendo

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_p(R_1) &= -\frac{q}{4\pi a}\left(\frac{a}{R_1^2}-1\right) \\
\sigma_p(R_2) &= \frac{q}{4\pi a}\left(\frac{a}{R_2^2}-1\right) \\
\varkappa_p &= \frac{q}{2\pi a}\,\frac{1}{r} \qquad\qquad (R_1 < r < R_2)
\end{aligned}}$$

5) La carga total de polarización es suma de la existente en las superficies del dieléctrico más la comprendida en su volumen.

$$\begin{aligned}
Q_p &= -\frac{q}{4\pi a}\left(\frac{a}{R_1^2}-1\right)4\pi R_1^2 + \frac{q}{4\pi a}\left(\frac{a}{R_2^2}-1\right)4\pi R_2^2 + \frac{q}{2\pi a}\int_{R_1}^{R_2}\frac{4\pi r^2}{r}\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{q}{a}\left(a-R_1^2\right) + \frac{q}{a}\left(a-R_2^2\right) + \frac{2q}{a}\,\frac{1}{2}(R_2^2-R_1^2) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_p = 0}$$

lo que resulta congruente dado que la carga total de polarizacion es el resultado de sumar contribuciones de dipolos, cada uno con carga total nula.

6) Las condiciones de contorno, a partir de las densidades de carga y teniendo en cuenta que las únicas componentes no nulas son las normales, son:

$$\begin{aligned}
E(R_1^+) - E(R_1^-) &= -\frac{\sigma_p(R_1)}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{R_1^2}-1\right) \\
D(R_1^+) - D(R_1^-) &= 0 \\
E(R_2^+) - E(R_2^-) &= \frac{\sigma_p(R_2)+\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{R_2^2}-1\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\
D(R_2^+) - D(R_2^-) &= \sigma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
E(R_1^+) - E(R_1^-) &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{R_1^2}-1\right) \\
D(R_1^+) - D(R_1^-) &= 0 \\
E(R_2^+) - E(R_2^-) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{R_2^2}-1\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\
D(R_2^+) - D(R_2^-) &= \sigma
\end{aligned}}$$

Si se calculan los incrementos a partir de los valores de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$ se obtienen

$$
\begin{aligned}
E(R_1^+) - E(R_1^-) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_1^2} &&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{R_1^2} - 1\right) \\
D(R_1^+) - D(R_1^-) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} &&= 0 \\
E(R_2^+) - E(R_2^-) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_2^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 R_2^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a} &&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{R_2^2} - 1\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\
D(R_2^+) - D(R_2^-) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} + \sigma\,\frac{R_2^2}{R_2^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\sigma &&= \sigma
\end{aligned}
$$

que coinciden con los resultados anteriores.