RESOLUCIÓN POSIBLE para la Segunda Parte

1) Las condiciones de contorno determinan

$$\begin{aligned} V_a &= F + G\frac{\cos\varphi}{2a\cos\varphi} \\ V_b &= F + G\frac{\cos\varphi}{2b\cos\varphi} \end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \frac{bV_b - aV_a}{b-a} \\ G &= -2ab\frac{V_b - V_a}{b-a} \end{aligned}}$$

2) Las componentes del campo eléctrico se obtienen a partir de $V(\rho,\varphi) = F + G\dfrac{\cos\varphi}{\rho}$, sustituyendo posteriormente los valores de F y G.

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial\rho} &= G\frac{\cos\varphi}{\rho^2} \\ E_\varphi &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi} &= G\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho^2} \end{aligned}$$

El módulo del campo eléctrico es

$$E = \sqrt{E_\rho^2 + E_\varphi^2} = \frac{|G|}{\rho^2}$$

por lo que su valor es mínimo en $\rho = 2b$.
En resumen

$$\boxed{\begin{aligned} E_\rho &= -2ab\frac{V_b - V_a}{b-a}\frac{\cos\varphi}{\rho^2} & E_\varphi &= -2ab\frac{V_b - V_a}{b-a}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho^2} & & \\ E &= 2ab\frac{V_b - V_a}{b-a}\frac{1}{\rho^2} & \text{mín}E &: \text{en } \rho = 2b & E_{\text{min}} &= \frac{a}{2b}\frac{V_b - V_a}{b-a} \end{aligned}}$$

3) Sobre las superficies de los conductores en la cavidad interna la densidad de carga es

$$\sigma = \varepsilon_o E^*$$

siendo E^* la proyección del campo eléctrico en la superficie según la normal exterior a la misma. Como en esos puntos el campo es perpendicular a la superficie del conductor siendo entrante en el cilindro macizo de radio a y saliente de la superficie cilíndrica de radio b, resulta

$$\begin{aligned} \sigma_a &= -\varepsilon_o\frac{|G|}{4a^2\cos^2\varphi} \\ \sigma_b &= \varepsilon_o\frac{|G|}{4b^2\cos^2\varphi} \end{aligned}$$

Sustituyendo G por su valor

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_a &= -\varepsilon_o\frac{b}{2a}\frac{V_b - V_a}{b-a}\frac{1}{\cos^2\varphi} \\ \sigma_b &= \varepsilon_o\frac{a}{2b}\frac{V_b - V_a}{b-a}\frac{1}{\cos^2\varphi} \end{aligned}}$$

4) Las líneas del campo eléctrico son tangentes a $\boldsymbol{E}$ en todos sus puntos. Por tanto, en cualquier plano z = cte., se expresan mediante

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi}\ ; \qquad \frac{d\rho}{\cos\varphi} = \frac{\rho d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\ ; \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{cotg}\varphi d\varphi = \frac{d\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

La familia de curvas es

$$\rho = C\operatorname{sen}\varphi$$

La línea de campo que llega al conductor macizo en $\varphi = 0$ debe satisfacer $d\varphi = 0\ \forall\rho$ por lo que verifica $\varphi = 0$ en todos sus puntos y su ecuación es $\varphi = 0$.

El punto $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ del conductor macizo tiene un radio polar $\rho = 2a\cos\dfrac{\pi}{4} = a\sqrt{2}$ y la línea de campo solicitada corresponde a

$$C = \frac{a\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}} = 2a$$

es decir

$$\rho = 2a\operatorname{sen}\varphi$$

$$\boxed{\begin{array}{rrcll} \text{Familia de líneas de campo:} & \rho & = & C\operatorname{sen}\varphi & (0 < \varphi < \frac{\pi}{2}) \\ & \varphi & = & 0 & (\varphi = 0) \\ \text{Línea de campo por } \rho = a\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}\text{:} & \rho & = & 2a\operatorname{sen}\varphi & \end{array}}$$

5) En los puntos extremos de cualquier línea de campo se satisfacen la ecuación de la línea de campo y la de la curva que limita el conductor. Por tanto

$$\rho_a = C\operatorname{sen}\varphi_a \qquad \rho_a = 2a\cos\varphi_a$$

$$\rho_b = C\operatorname{sen}\varphi_b \qquad \rho_b = 2b\cos\varphi_b$$

resultando

$$\operatorname{tg}\varphi_b = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi_a$$

Al ser $b > a$ y situarse los ángulos en el intervalo $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ se obtiene finalmente

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi_b = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi_a > \operatorname{tg}\varphi_a}$$

lo que confirma la curvatura de las líneas de campo de la figura 1.

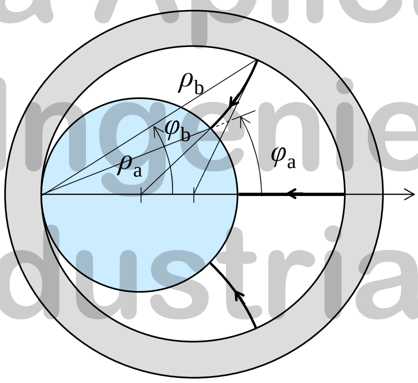

Figura 1: Líneas de campo