SOLUCIONES POSIBLES para las cuestiones de la Primera Parte

1) Los términos monopolar y dipolar se anulan porque

$$A = \sum_{i=1}^{n} q_i = -q + 2q - q = 0 \qquad B = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u_r} = (-q\boldsymbol{\ell} + q\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{u_r} = 0$$

El primer término no nulo es el cuadripolar, cuyo numerador es

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\ell_i^2}{2}(3\cos^2\theta_i - 1) = -\frac{1}{2}q\ell^2(3\cos^2\theta - 1) - \frac{1}{2}q\ell^2(3\cos^2\theta - 1) = -q\ell^2(3\cos^2\theta - 1)$$

pues si $-q(0,0,\ell)$ es la carga q_1 y $-q(0,0,-\ell)$ la carga q_3, se verifica que $\theta_1 + \theta_3 = \pi$, por lo que $\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_3 = \cos^2\theta$.

Por consiguiente, el potencial se expresa mediante

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q\ell^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

---

2) La densidad pedida es

$$\kappa_p = -\operatorname{div}\boldsymbol{P} = -\lim_{r\to 0} P\frac{(r+dr)^2 d\Omega - r^2 d\Omega}{r^2 dr d\Omega} = -\frac{P}{r^2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}r} = -2\frac{P}{r}$$

La carga de polarización en la superficie de la bola es

$$Q_{\mathrm{p_s}} = 4\pi R^2 P$$

La carga de polarización en el volumen de la bola es

$$Q_{\mathrm{p_v}} = \int_0^R -2\frac{P}{r}4\pi r^2 dr = -4\pi R^2 P$$

por lo que la carga total de polarización en la bola es

$$Q_{\mathrm{p_{total}}} = 4\pi R^2 P - 4\pi R^2 P = 0$$

---

3) A partir de la energía $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2x}V^2$ se obtiene la fuerza atractiva que es

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{V=\mathrm{cte}} \qquad \text{resulta} \qquad F_x = -\frac{\varepsilon_0 S}{2e^2}V^2 \quad (x = e)$$

También puede obtenerse utilizando la energía en función de la carga $U = \frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S}$ y empleando

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{Q=\mathrm{cte}} \quad\Rightarrow\quad F_x = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

que coincide con la primera sustituyendo en aquella $V = \frac{Q}{C} = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$. En todo caso, como se pide el valor absoluto y la carga es dato, el resultado es

$$|F_x| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

Para calcular el trabajo es más conveniente utilizar la fuerza en función de la carga Q pues, al ser ésta constante, la fuerza F_x también resulta constante y el trabajo realizado al desplazar la placa negativa la cantidad e, en la dirección y sentido de x (alejamiento entre placas), es

$$\mathcal{T} = F_x e = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} e$$

Si se hubiese expresado F_x en función de V el cálculo del trabajo debería realizarse teniendo en cuenta que V varía con el desplazamiento.

Este trabajo incrementa la energía del sistema ya que $\triangle U = -\mathcal{T}$, es decir

$$U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = \frac{Q^2}{2C_{\text{final}}} - \frac{Q^2}{2C_{\text{inicial}}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} 2e - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} e = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} e$$

---

4) Hay que comprobar las condiciones de contorno:

$$(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{k} = \sigma = 0\,; \text{ se cumple pues } (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{k} = -4\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

$$(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \times \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \times \boldsymbol{k}\,; \text{ no se cumple pues } \boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1 = -4\boldsymbol{j} = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)$$

Por tanto, no son posibles los valores indicados.

---

5) El potencial sobre la superficie esférica es el de un dipolo en su centro, igual a

$$V_{\text{dipolo}} = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V_0 \cos\theta = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow p = 4\pi\varepsilon_0 V_0 R^2$$

Por tanto, el teorema de Dirichlet en dominios infinitos determina que el potencial pedido es

$$V = \frac{4\pi\varepsilon_0 V_0 R^2 \boldsymbol{u}_z \cdot \boldsymbol{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{R^2}{r^2} V_0 \cos\theta$$
