Álgebra Lineal
HOJA 3, 2019/20

Permitimos que la letra F denote tanto el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. La letra V siempre denota un espacio vectorial sobre F.

1. Dar fórmulas que relacionen explícitamente $\det A$ y $\det B$ en cada uno de los siguientes casos:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2a_1 & 3a_2 & 5a_3 \\ 2b_1 & 3b_2 & 5b_3 \\ 2c_1 & 3c_2 & 5c_3 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3a_1 & 4a_2 + 5a_1 & 5a_3 \\ 3b_1 & 4b_2 + 5b_1 & 5b_3 \\ 3c_1 & 4c_2 + 5c_1 & 5c_3 \end{pmatrix}.$$

2. Usar operaciones de columna o de fila para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Demostrar que el determinante de una matriz 3×3 anti-simétrica es necesariamente igual a 0.

4. Demostrar que el determinante de una matriz 5×5 anti-simétrica es necesariamente igual a 0.

5. Encontrar una matriz 2×2 anti-simétrica cuyo determinante sea distinto de 0.

6. Encontrar una matriz 4×4 anti-simétrica cuyo determinante sea distinto de 0.

7. Decimos que una matriz cuadrada A es nilpotente si existe un entero positivo k para el que se cumple que $A^k = 0$. Demostrar que si A es nilpotente, entonces $\det A = 0$.

8. Demostrar que si dos matrices cuadradas son similares, entonces tienen el mismo determinante.

9. Decimos que una matriz real cuadrada A es ortogonal si $A^TA = I$. Demostrar que si A es ortogonal, entonces $\det A \in \{-1, 1\}$.

10. Usar operaciones de columna y de fila para demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = (z-x)(z-y)(y-x).$$

11. Usar operaciones de fila para comprobar que el área del triángulo en el plano $\mathbb{R}^2$ con vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_3, y_3) es igual al valor absoluto de

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

12. Sean A y B matrices $n \times n$. Comprobar que las siguientes matrices de bloques tienen todas determinante igual a $\det A$:

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ B & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0_n \\ B & I_n \end{pmatrix}.$$

13. Sea $\sigma \in S_5$ la permutación que satisface $\sigma(1, 2, 3, 4, 5) = (5, 4, 1, 2, 3)$.
(a) Determinar el signo de σ.
(b) Determinar $(\sigma \circ \sigma)(1, 2, 3, 4, 5)$.
(c) Determinar $\sigma^{-1}(1, 2, 3, 4, 5)$.
(d) Determinar el signo de σ^{-1}.

14. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Calcular el determinante de la matriz $A + tI_5$, para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_5 \end{pmatrix}.$$

16. Encontrar la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 & -17 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Comprobar que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Decidir cuál es el rango de

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

19. Decidir para qué valores de a tiene solución única el sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

20. Usar la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & \alpha \\ & & x_2 & + & x_3 & = & \beta. \end{array}$$

21. Sea A una matriz $n \times n$, y sea C su matriz de cofactores. Demostrar que $\det C^T = (\det A)^{n-1}$.