Álgebra Lineal
HOJA 2, 2019/20

Permitimos que la letra F denote tanto el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. La letra V siempre denota un espacio vectorial sobre F.

1. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) El rango de una matriz es igual al número de columnas distintas de $\underline{0}$ que contiene.

(b) La única matriz $m \times n$ con rango igual a 0 es aquella cuyas entradas son todas 0.

(c) Las operaciones elementales con filas preservan siempre el rango de una matriz.

(d) Las operaciones elementales con columnas preservan siempre el rango de una matriz.

(e) El rango de una matriz es igual al número máximo de columnas linealmente independientes que contiene.

(f) El rango de una matriz es igual al número máximo de filas linealmente independientes que contiene.

(g) El rango de una matriz $n \times n$ es menor o igual que n.

(h) Una matriz $n \times n$ que tenga rango igial a n es necesariamente invertible.

2. Una matriz 54×37 A tiene rango igual a 31. Determinar la dimensión del núcleo .

3. Para cada una de las siguientes matrices, encontrar bases para su núcleo y su rango.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Sea $T : X \to Y$ una función lineal, y sea V un subespacio de X. Demostrar que la dimensión del subespacio

$$T(V) = \{T(\underline{v}) : \underline{v} \in V\}$$

de Y es menor o igual que la dimensión de V.

Deducir que dadas dos matrices A y B (cuyo producto AB esté definido), se tiene $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$.

5. En cada uno de los siguientes apartados, escribir una matriz con las propiedades especificadas, o demostrar que no puede existir tal matriz.

(a) El espacio columna contiene a $(1,0,0)^T$ y a $(0,0,1)^T$, mientras que el espacio fila contiene a $(1,1)^T$ y a $(1,2)^T$.
(b) $(1,1,1)^T$ es un vector generador del espacio columna, mientras que $(1,2,3)^T$ es un vector generador del núcleo.
(c) El espacio columna tiene dimensión igual a 4, mientras que el espacio fila tiene dimensión igual a 3.

6. Dar una base de F^7 que contenga los vectores

$$(e^3,3,4,0,-\pi,6,-2)^T,(0,0,2,-1,\pi^e,1,1)^T,(0,0,0,0,3,-3,2)^T,(0,0,0,0,0,0,1)^T.$$

7. Encontrar bases para el espacio columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & 0 & 24 \\ -1 & -4 & 4 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

8. Determinar los espacios vectoriales complejos $\mathrm{Im}(A)$ y $\mathrm{Ker}(A)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Dar una base de F^5 que contenga los vectores

$$(1,2,-1,2,3)^T,(2,2,1,5,5)^T,(-1,-4,4,7,-11)^T.$$

10. Considerar el sistema de vectores

$$(1,2,1,1)^T,(0,1,3,1)^T,(0,3,2,0)^T,(0,1,0,0)^T.$$

Demostrar que es una base de F^4, y encontrar la matriz de cambio de coordenadas desde esta base a la base canónica de F^4.

11. Encontrar la matriz de cambio de coordenadas desde la base $\{1,1+t\}$ hasta la base $\{1-t,2t\}$ de $\mathbb{P}_1$.

12. Demostrar que si las matrices A y B son similares, entonces $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$.

13. Decidir razonadamente si las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

son o no similares.

14. Sea $T : F^2 \to F^2$ la función lineal dada por

$$T((x,y)^T) = (3x+y, x-2y)^T.$$

Encontrar la matriz de T con respecto a la base canónica de F^2 como dominio y la base $(1,1)^T,(1,2)^T$ de F^2 como codominio.

15. Sea $T : F^2 \to F^2$ la función lineal dada por

$$T((x,y)^T) = (x+y, -2x+4y)^T.$$

Encontrar la matriz de T con respecto a la base $(1,1)^T, (1,2)^T$ de F^2 como dominio y codominio.

16. Sea $T : F^2 \to F^3$ la función lineal dada por

$$T((x,y)^T) = (x+3y, 0, 2x-4y)^T.$$

Encontrar la matriz de T con respecto a la base canónica de F^2 y la base (ordenada) $\underline{e}_3, \underline{e}_2, \underline{e}_1$ de F^3 (el orden importa).

17. Sea $T : F^3 \to F^3$ la función lineal dada por

$$T((x,y,z)^T) = (x-y, y-x, x-z)^T.$$

Sea $\underline{v} = (1,1,2)^T$, y considerar la base

$$B = \{(1,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,0)^T\}$$

de F^3. Escribir explícitamente $[T]_{B,B}, [\underline{v}]_B$ y $[T(\underline{v})]_B$, y verificar que efectivamente cumplen la propiedad

$$[T(\underline{v})]_B = [T]_{B,B}, [\underline{v}]_B.$$

18. Sea $T : F^3 \to F^3$ el isomorfismo dado por

$$T((x,y,z)^T) = (2x-y, -x+2y-z, z-y)^T.$$

Definir explícitamente la función lineal inversa T^{-1} a partir de haber calculado la matriz inversa de T, y comprobar que efectivamente la función obtenida es la correcta.

19. Sea $T : F^2 \to F^2$ la función lineal dada por

$$T((x,y)^T) = (-7x-15y, 6x+12y)^T.$$

Encontrar una base B de F^2 que tenga la propiedad de que

$$[T]_{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Demostrar que si una matriz A es similar a una matriz B, y además B es similar a una matriz C, entonces A es similar a C.

21. Demostrar que si una matriz A es similar a una matriz B, entonces A^n es similar a B^r para cualquier número natural n.

22. Estudiar si los polinomios $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$ son linealmente independientes en $\mathbb{P}_2$.