Álgebra Lineal
HOJA 1, 2019/20

Con la letra F denotamos tanto el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. La letra V siempre denota un espacio vectorial sobre F.

1. Dar una base del espacio vectorial
$$\{A \in M_{3\times 3} : A^T = A\}$$
de matrices 3×3 simétricas.

2. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) Cualquier conjunto que contiene a $\underline{0}$ es linealmente dependiente.
b) Cualquier base contiene a $\underline{0}$.
c) Los subconjuntos de conjuntos linealmente dependientes son linealmente dependientes.
d) Los subconjuntos de conjuntos linealmente independientes son linealmente independientes.

3. Sea $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$ un sistema de vectores linealmente independientes pero que no es sistema generador de V. Sea $\underline{v}_{r+1}$ cualquier vector que no puede ser representado como combinación lineal de $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$. Demostrar que el sistema de vectores $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}$ es linealmente independiente.

4. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes sistemas de vectores en F^3 son generadores, cuáles son linealmente independientes, y cuáles son bases. Para los que sean linealmente dependientes, escribir uno de los vectores como combinación lineal de los otros.
a) $\{(1,1,1)^T\}$.
b) $\{(1,0,0)^T, (0,0,1)^T\}$.
c) $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T, (1,1,1)^T\}$.
d) $\{(1,2,1)^T, (2,0,-1)^T, (4,4,1)^T\}$.
e) $\{(1,2,1)^T, (2,0,-1)^T, (4,4,0)^T\}$.
f) $\{(1,2,3)^T, (2,1,0)^T, (1,5,9)^T\}$.
g) $\{(1,2,3)^T, (0,4,5)^T, (0,0,6)^T, (1,1,1)^T\}$.
h) $\{(3,2,1)^T, (1,0,0)^T, (2,1,0)^T\}$.

5. Decidir razonadamente si el siguiente sistema de vectores en $M_{2\times 2}$ es generador, si es linealmente independiente, y si es base:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Dadas matrices $A, B \in M_{m\times n}$ que satisfacen $A\underline{v} = B\underline{v}$ para todo $\underline{v} \in F^n$, demostrar que necesariamente $A = B$.

7. Decidir razonadamente cuáles de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son lineales:

a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1+y \end{pmatrix}$.

b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$.

d) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$.

e) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sin(y) \end{pmatrix}$.

f) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

8. Encontrar la matriz correspondiente a la función lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por la reflexión en la línea $2x = y$. ¿Y respecto de $2x = y + 1$?

9. Encontrar la matriz correspondiente a cada una de las siguientes funciones lineales:
a) $T : F^2 \to F^3$ definida por $T(x,y)^T = (x+2y, 2x-5y, 7y)^T$.
b) $T : F^4 \to F^3$ definida por $T(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = (x_1+x_2+x_3+x_4, x_2-x_4, x_1+3x_2+6x_4)^T$.
c) $T : P_n \to P_n$ definida por $T(f(t)) = f'(t)$ (encontrar la matriz con respecto a la base canónica $1, t, t^2, \ldots, t^n$).
d) $T : P_n \to P_n$ definida por $T(f(t)) = 2f(t) + 3f'(t) - 4f''(t)$ (encontrar la matriz con respecto a la base canónica $1, t, t^2, \ldots, t^n$).

10. El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ se puede identificar canónicamente con el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$, identificando cada $z = x+iy \in \mathbb{C}$ con el vector $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$.
a) Considerando $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial complejo, demostrar que la multiplicación por un elemento $\alpha = a+ib \in \mathbb{C}$ es una función lineal compleja $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y encontrar su matriz.
b) Considerando $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial real identificado con $\mathbb{R}^2$, demostrar que la multiplicación por un elemento $\alpha = a+ib \in \mathbb{C}$ define una función lineal real $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y encontrar su matriz.
c) Definimos $T(x+iy) = 2x-y+i(x-3y)$. Demostrar que la función $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ no es lineal compleja, pero sí es lineal real. Encontrar la matriz de la función lineal real T.

11. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcular los siguientes productos de matrices, siempre que estén bien definidos:
$AB, BA, ABC, ABD, BC, BC^T, B^TC, DC, D^TC^T, A(3B+C), B^TA$.

12. Encontrar todos los inversos por la derecha de $A = (1,1)$. Deducir que A no es invertible por la izquierda.

13. Encontrar todos los inversos por la izquierda de $(1,2,3)^T$. Decidir razonadamente si $(1,2,3)^T$ es invertible por la derecha.

14. Sean T_1 y T_2 las funciones lineales en F^5 dadas por

$$T_1\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_4\\ x_3\\ x_2\\ x_5\end{pmatrix},\quad T_2\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2+ax_4\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$$

(para cualquier elemento $a\in F$).

Demostrar que T_1 y T_2 son invertibles, y escribir las matrices de sus inversas.

15. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios:
a) $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1,x_2,x_3\geq 0\}$.
b) $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1=0\}$.
c) $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1x_2=0\}$.
d) $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1+x_2+x_3=0\}$.
e) $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1+x_2+x_3=1\}$.

16. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes subconjuntos de $M_{3\times 3}$ son subespacios:
a) El subconjunto de matrices simétricas.
b) El subconjunto de matrices invertibles.
c) El subconjunto de matrices no invertibles.
d) $\{A\in M_{3\times 3} : A^2=A\}$.
e) $\{A\in M_{3\times 3} : \operatorname{tr}(A)=0\}$.

17. Decidir razonadamente para qué valores de b tiene solución el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\underline{x}=\begin{pmatrix} 1\\ 4\\ b\end{pmatrix},$$

y encontrar la solución general del sistema para cada uno de esos valores.

18. Decidir razonadamente si el sistema de vectores

$$(1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(0,0,1,1)^T,(0,1,0,1)^T$$

es o no linealmente independiente en F^4, y si es o no generador.

19. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes sistemas de vectores son bases en F^3:
a) $(1,2,-1)^T,(1,0,2)^T,(2,1,1)^T$.
b) $(-1,3,2)^T,(-3,1,3)^T,(2,10,2)^T$.
c) $(67,13,-47)^T,(\pi,-7{,}84,0)^T,(3,0,0)^T$.

20. Decidir razonadamente si los polinomios

$$x^3+2x, x^2+x+1, x^3+5$$

forman un sistema generador de $\mathcal{P}_3$.

21. Encontrar una matriz X que satisfaga $X = AX + B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

22. Decidir para qué valores de a, b, c, d es invertible la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix},$$

y describir la matriz inversa para esos valores.

23. Escribir la matriz A correspondiente a una rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo α alrededor de la recta $y = x$ del plano xy. Hacer lo mismo para una rotaciÃşn alrededor de la recta generada por el vector $(1, 1, 1)$.

24. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Un espacio vectorial puede tener dos bases distintas.

b) Cualquier subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita tiene necesariamente dimensión finita también.

c) Un espacio vectorial de dimensión igual a $n \in \mathbb{N}$ tiene un único subespacio de dimensión igual a 0, y un único subespacio de dimensión igual a n.

25. Determinar la dimensión de $\mathbb{P}_n$, la dimensión de $M_{m\times n}$, y la dimensión del espacio de matrices $n \times n$ simétricas.

26. Si $\dim V = n$, demostrar que un sistema de n vectores $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ es linealmente independiente si y sólo si es generador.

27. Sea $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ una base de V. Demostrar que $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_3$ es una base de V.

28. Dados los elementos

$$\underline{v}_1 = (2, -1, 1, 5, -3)^T, \underline{v}_2 = (3, -2, 0, 0, 0)^T, \underline{v}_3 = (1, 1, 50, -921, 0)^T$$

de F^5, demostrar que son un sistema linealmente independiente, y encontrar una base de F^5 que contenga a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ y $\underline{v}_3$.

29. Determinar la dimensión del subespacio span(S) de F^4 generado por el conjunto de vectores

$$S = \{(1, 2, -1, 3)^T, (1, 0, 0, 2)^T, (2, 8, -4, 8)^T, (1, 1, 1, 1)^T, (3, 3, 0, 6)^T\}.$$

30. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Cualquier sistema de ecuaciones lineales tiene al menos una solución.

b) Cualquier sistema de ecuaciones lineales tiene como mucho una solución.

c) Cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene al menos una solución.

d) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene al menos una solución.

e) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene como mucho una solución.

f) Si el sistema homogéneo asociado a un sistema dado de ecuaciones lineales tiene al menos una solución, entonces el sistema dado de ecuaciones lineales tiene al menos una solución.

g) Si la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas es invertible, entonces el sistema no tiene ninguna solución distinta de $\underline{0}$.

h) El conjunto de soluciones de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un subespacio de F^n.

i) El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un subespacio de F^n.

31. Demostrar que cada dos bases en un espacio vectorial tienen el mismo nÃžmero de vectores.

32. ¿Tienen los tres planos $x + 2y + z = 4$, $y - z = 1$ y $x + 3y = 0$ algún punto en común?
.