# MECÁNICA Y ONDAS I

Curso 2019/2020. Grupo 521. Hoja 9

SISTEMAS DE PARTÍCULAS: FUERZAS CENTRALES Y COLISIONES

1 **Problema de Ruherford.** Dos partículas de masa $m_1$ y $m_2$ y cargas iguales (por ejemplo, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$) interactúan a través de la fuerza de Coulomb repulsiva, $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$. (a) Representar el potencial efectivo y discutir los posibles tipos de movimiento radial; dibujar el diagrama de fase. Resolver exactamente la ecuación de Binet utilizando como condiciones iniciales $r(\phi = 0) = r_m$ (pericentro) y $\dot{r}(\phi = 0) = 0$ (evaluar $r_m$ en función de la energía total relativa $E$ y el momento angular relativo $\ell$). Dibujar la órbita.

2 Un satélite se encuentra en una orbita circular de radio $R$ alrededor de la tierra. Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales del satélite si se le perturba ligeramente de su orbita circular en dirección radial. Utilizando la tercera ley de Kepler para el periodo de revolución, determinar si la nueva orbita perturbada es cerrada o abierta.

3 Una partícula de masa $m$ está sometida a una fuerza $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -k\,\mathbf{r}$ (Hooke's law $k > 0$) debida a un centro de fuerzas situado en el origen de coordenadas $O$. (a) Representar el potencial efectivo y discutir los posibles tipos de movimiento radial (dibujar el diagrama de fase). Suponiendo que la órbita es una circunferencia de radio $R$ con centro en el origen de fuerzas, determinar la energía $E$, el momento angular $\ell$ y el periodo de revolución $T$ de dicho movimiento circular. (b) Si se perturba ligeramente el cuerpo en dirección radial, ¿cuál será el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales alrededor de $r = R$? Demonstrar que las órbitas que difieren ligeramente de un círculo son cerradas. (c) Demonstrar que, si escogemos que el perihelio corresponda al ángulo $\varphi = 0$, las orbitas más generales son del tipo

$$r(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{1 + B\cos(2\varphi)}}.$$

Encontrar las dos ecuaciones que relacionan las constantes $A$ y $B$ con la energía mecánica $E$ y el momento angular $\ell$.

4 Dos planetas con la misma masa $m$ se mueven en órbitas elípticas coplanarias en direcciones opuestas y colisionan, quedando pegados, cuando su distancia al sol es $r$ ($M_S \gg m$). En el momento de la colisión uno de los planetas tenía velocidad $v_1$ y se encontraba en su perihelio, mientras que el otro estaba en su afelio y tenia velocidad $v_2$. La excentricidad de ambas órbitas era la misma. Encontrar el eje mayor de la órbita que seguirán las dos masas pegadas.

5 Una partícula de masa $m$ está sometida a un campo de fuerzas central y repulsivo cuya correspondiente energía potencial es $U(r) = \frac{k}{r^2}$, con $k > 0$. (a) Demostrar que la ecuación de la órbita en coordenadas polares planas viene dada por $r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(w\varphi)}$, hallando los valores de las constantes $r_0$ y $w$ en función de la energía mecánica $E$ y el momento angular $\ell$. Representar la órbita.

6 Un satélite de masa $m_S$ se mueve en una orbita circular de radio $R$ alrededor de la tierra ($m_S \ll m_T$) con velocidad $v$. Demonstrar que, si en un dado instante $t_0$ el satélite repentinamente reduce su masa a la mitad de su valor inicial ($m_S \to m_S/2$) y aumenta su velocidad de $\sqrt{2}$ ($v \to \sqrt{2}v$), su orbita por $t > t_0$ deviene parabólica.