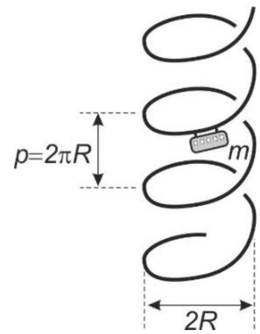
MECÁNICA Y ONDAS I

Curso 2019/2020. Grupo 521

Hoja 4. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Y DIAGRAMAS DE FASES

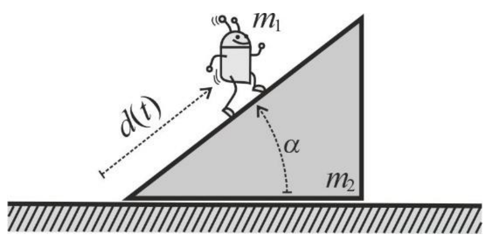
1 ***Ligaduras esclerónomas y multiplicadores de Lagrange: montaña rusa helicoidal***

El raíl de una montaña rusa tiene forma de hélice cilíndrica recta y en él está enganchado un vagón de masa m que desliza sin rozamiento bajo la acción de su propio peso. El eje de la hélice es vertical, su radio es R, y el paso de rosca es $p = 2\pi R$. Los diseñadores han reforzado el enganche del vagón de modo que puede soportar una fuerza máxima de $3mg/4$. Inicialmente ($t = 0$) el vagón está en reposo. Determinar la fuerza de ligadura que mantiene al vagón en el raíl. ¿En qué instante tendrá lugar el descarrilamiento?



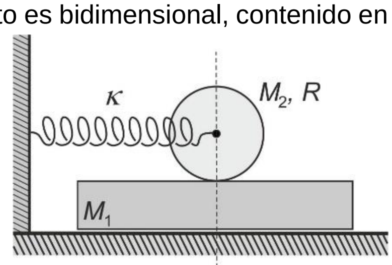
2 ***Ligaduras reónomas y multiplicadores de Lagrange: androide sobre plano inclinado***

La figura muestra un androide mecánico de masa m_1 que es capaz de subir caminando por una cuña de masa m_2. La cuña, que está en reposo respecto al suelo en el instante $t = 0$, forma un ángulo α con el plano horizontal y puede deslizar sin rozamiento sobre el mismo. El robot también está inicialmente parado en el punto más bajo de la rampa y, a partir de este instante, asciende con movimiento no uniforme recorriendo una distancia $d(t)$, medida sobre la cuña. Esta función del tiempo $d(t)$ se supone conocida. Todo el movimiento del sistema tiene lugar en el plano de la figura. (a) Hallar el lagrangiano, y determinar la posición del sistema como función del tiempo a partir de los datos del problema. Discutir las posibles cantidades conservadas interpretándolas físicamente. (b) Determinar la fuerza de ligadura que la cuña ejerce sobre el androide y que garantiza que se produzca el movimiento descrito. Particularizar el resultado al caso en que $\alpha = \pi/4$ y $m_1 \ll m_2$, tomando además que $d(t) = gt^3/(6T_0)$, donde g es la aceleración de la gravedad y T_0 es una constante positiva con las dimensiones apropiadas. (c) Considerar en lo sucesivo que se cumplen las condiciones del apartado (b) y que el coeficiente de fricción estática entre las patas del robot y la cuña es $\mu_s = 1.5$. Hallar el instante en que las suelas del robot pierden el agarre y comienzan a patinar.



3 ***Reducción de la dimensionalidad del sistema de ecuaciones y diagrama de fases: rodillo rodante sobre plataforma móvil***

El sistema de la figura consta de un paralelepípedo de masa M_1 sobre el que rueda un cilindro de masa M_2 y radio R. El paralelepípedo puede deslizar sin rozamiento sobre el plano horizontal mientras que el cilindro rueda sin deslizar sobre el paralelepípedo. Además, el centro del cilindro está unido a un punto fijo mediante un muelle horizontal de constante elástica κ. Todo el movimiento es bidimensional, contenido en el plano de la figura. (a) Hallar el lagrangiano del sistema y deducir las ecuaciones de movimiento. Se recomienda usar como coordenadas generalizadas los desplazamientos horizontales de cada uno de los objetos. (b) Determinar las cantidades conservadas e interpretarlas físicamente. Emplearlas para reducir el sistema a un problema con un solo grado de libertad. (c) Representar el correspondiente diagrama de fases e interpretarlo. Opcional: analizar qué sucede si se emplean como coordenadas el desplazamiento horizontal de la plataforma y el ángulo girado por el cilindro respecto a la vertical.



4 ***Diagrama de fases para un sistema de un grado de libertad: el despertar de la peonza***

Una partícula cuya masa se denota A se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza dada por la expresión $f(\theta) = D\ \sin(\theta)\,[1 - G/\cos^4(\theta/2)]$, donde los parámetros D, G son constantes que cumplen $D > 0$ y $1 > G > 0$. La variable θ, que especifica la ubicación de la partícula, es adimensional y su rango de variación está limitado al intervalo $\theta \in (0, \pi)$. Encontrar la energía potencial correspondiente a la fuerza $f(\theta)$. Esbozar el diagrama de fases $(\theta, \dot{\theta})$ del sistema discutiendo los posibles comportamientos de la partícula. La dinámica descrita en este ejercicio encuentra aplicación en la discusión del movimiento del eje de una *peonza dormida* en rotación cuando esta “se despierta”.