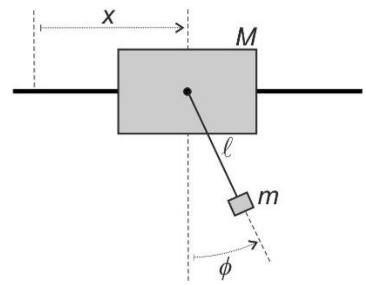
MECÁNICA Y ONDAS I

Curso 2019/2020. Grupo 521

Hoja 3. MECÁNICA LAGRANGIANA: SIMETRÍA Y CANTIDADES CONSERVADAS

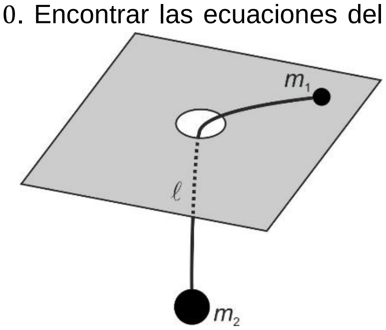
1 ***Simetría traslacional, conservación, y reducción de la dimensionalidad del sistema de ecuaciones: péndulo simple con punto de suspensión móvil***



Una partícula de masa M se puede mover sin rozamiento a lo largo de una recta horizontal. De la partícula cuelga un péndulo simple de longitud ℓ y masa m sometido a la fuerza peso. Todo el sistema está contenido en un plano. (a) Hallar el lagrangiano, $L_{2D}(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, t)$, y determinar las ecuaciones del movimiento. (b) Mostrar que el momento lineal total del sistema es conservado. Usar la conservación del momento para desacoplar la ecuación diferencial que gobierna la dinámica de la coordenada ϕ del péndulo.

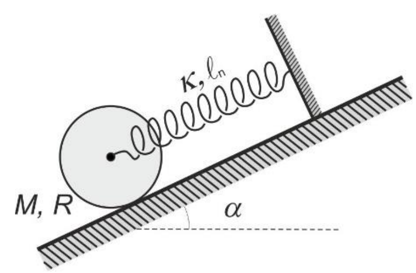
2 ***Simetrías, conservación, reducción del orden del sistema de ecuaciones, potencial efectivo, y comportamiento cualitativo: fuerza central mediada por una cuerda***

Un cuerpo pequeño de masa m_1 se encuentra sobre una mesa horizontal, no habiendo rozamiento entre el cuerpo y la mesa. La partícula descrita está unida a una cuerda que se hace pasar por un agujero en el centro de la mesa. (a) Desde debajo de la mesa se tira de la cuerda de modo que el segmento de la misma que está sobre la mesa se acorta a un ritmo constante y conocido $v > 0$. Encontrar las ecuaciones del movimiento mediante el formalismo lagrangiano, discutir las cantidades conservadas, y determinar el movimiento del sistema. (b) Analizar a continuación el caso en que de la cuerda, que tiene longitud ℓ, cuelga una segunda partícula de masa m_2 que sólo se puede mover verticalmente. Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones del movimiento. Hallar las cantidades conservadas y utilizarlas para reducir las ecuaciones a un problema en una sola dimensión y de primer orden en el tiempo. Estudiar cualitativamente el movimiento por medio del potencial efectivo correspondiente. Opcional: discutir qué sucede si se toman como coordenadas generalizadas las cartesianas (x, y) centradas en el agujero para la partícula m_1.



3 ***Formalismo lagrangiano aplicado a un sólido rígido en movimiento plano: cilindro sobre plano inclinado***

Un cilindro homogéneo de masa M y radio R se encuentra sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. La dirección del eje del cilindro no cambia durante el movimiento y la rodadura no entraña deslizamiento. El eje del cilindro está unido a un anclaje fijo mediante un muelle ideal de constante elástica κ y longitud natural ℓ_n. El muelle se mantiene en todo momento paralelo al plano inclinado. Todo el movimiento tiene lugar en un plano vertical que contiene la línea de máxima pendiente. Escribir la ligadura que especifica la condición de rodadura sin deslizamiento. Determinar las ecuaciones del movimiento del sistema y resolverlas. Encontrar el periodo de las oscilaciones del cilindro. Discutir las cantidades conservadas.



4 ***Potenciales dependientes de la velocidad: partícula cargada en campo electromagnético***

Respecto a un cierto sistema de referencia inercial, un campo electromagnético queda descrito por los campos vectoriales eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ y magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$. En la teoría electromagnética se demuestra que estos campos se pueden encontrar a partir de los potenciales escalar $V(\mathbf{x},t)$ y vector $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ mediante las expresiones:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\nabla V(\mathbf{x},t) - \frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \qquad ; \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla \times\, \mathbf{A}(\mathbf{x},t),$$

de modo que los efectos debidos al campo electromagnético se pueden describir mediante $V(\mathbf{x},t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ exclusivamente. En lo sucesivo suponer conocidos los campos V y $\mathbf{A}$. Sea una partícula de masa m y carga q sometida a fuerzas conservativas no electromagnéticas descritas por el lagrangiano $L = T - U$ y, además, a los potenciales V y $\mathbf{A}$. Se desea encontrar una energía potencial U^{em} dependiente no sólo de $\mathbf{x}$ y t, sino también de la velocidad, $U^{\text{em}}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$, y tal que las ecuaciones del movimiento se puedan extraer a partir del lagrangiano $\hat{L} = T - U - U^{\text{em}}$ por derivación mediante el procedimiento usual de Euler-Lagrange. Para encontrar U^{em} proceder como sigue: (a) Tomar coordenadas cartesianas, escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para L, e incorporar las fuerzas electromagnéticas de Coulomb-Lorentz (escritas en términos de los potenciales V y $\mathbf{A}$) al estilo de las ecuaciones de Lagrange de 1ª especie. (b) Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\hat{L}$. (c) Comparando ambas expresiones identificar el $U^{\text{em}}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$ adecuado. Este U^{em} es de importancia capital para la descripción de la interacción materia-radiación.