MECÁNICA Y ONDAS I

Curso 2019/2020. Grupo 521

Hoja 2. CÁLCULO DE VARIACIONES Y ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

1 ***Cálculo variacional: condición de estacionariedad para un funcional integral***

Considerar el siguiente funcional integral:

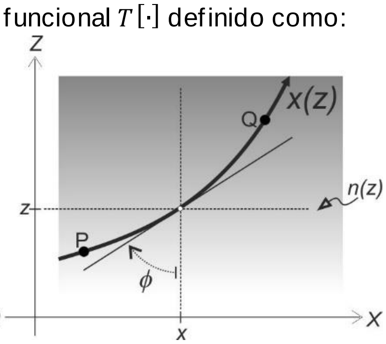
$$N[\varphi] = \int_1^2 dt\, \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 t^{-3}.$$

Determinar la función $\varphi(t)$ que cumple $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 18$ y hace estacionario al funcional. Opcional: demostrar que la solución hallada es el mínimo global del funcional $N[\cdot]$.

2 ***Cálculo variacional: principio de Fermat de tiempo estacionario***

Dentro de la aproximación de la *óptica geométrica*, la propagación de la luz en un medio óptico de índice de refracción dependiente de la posición queda representada por trayectorias, en general curvas, denominadas rayos. El principio de Fermat es una formulación variacional que permite determinar la geometría de dichos rayos suponiendo conocido el índice de refracción $n(\mathbf{r}) = n(x, y, z)$ del medio óptico en cuestión. Se denotará mediante $\mathbf{r}(s) = (x(s)\,, y(s)\,, z(s))$ a la expresión paramétrica de la trayectoria recorrida por la luz, donde s es el parámetro de arco a lo largo del rayo. El principio afirma que la trayectoria seguida, $\mathbf{r}(s)$, entre dos puntos P y Q es aquélla que hace estacionario al funcional $T[\cdot]$ definido como:

$$T[\mathbf{r}(s)] = \frac{1}{c}\int_P^Q ds\, n(\mathbf{r}(s)),$$



donde c es la velocidad de la luz en el vacío. (a) Considerar un medio óptico cuyo índice de refracción depende exclusivamente de la altura, $n(z)$. Un rayo se propaga en un plano vertical XZ y se puede describir mediante la ecuación $x = x(z)$. Mostrar que en todo punto a lo largo del rayo se cumple que $n \sin\phi = \text{const.}$, donde la variable ϕ denota el ángulo formado entre el rayo y el eje Z en el mencionado punto de la trayectoria. Interpretar el resultado. (b) Suponer que el índice de refracción crece con la altura medida desde el suelo según la expresión $n(z) = n_0 + m \cdot z$, donde n_0 y m son constantes positivas conocidas. Mostrar que la curva $z(x)$ ha de satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{[(n_0 + m \cdot z)/K]^2 - 1},$$

donde K es una constante que depende de las condiciones iniciales. Resolver dicha ecuación con las condiciones iniciales $z(0) = 0$ y $z'(0) = 0$. Sugerencia: el cambio de variable $\cosh u(x) = (n_0 + m \cdot z(x))/K$ simplifica la ecuación. Lo anterior es un modelo sencillo que permite entender la formación de los espejismos.

3 ***Covariancia de las ecuaciones de Euler-Lagrange: isocronía de las oscilaciones de un péndulo cicloidal***

Un péndulo cicloidal consiste en una partícula de masa m sometida a la fuerza peso y obligada a moverse confinada a una *cicloide* en el plano vertical XZ. Las ecuaciones paramétricas de la curva cicloide son $x(\sigma) = a\,(\sigma + \sin\sigma)$, $z(\sigma) = a\,(1 - \cos\sigma)$, donde el parámetro $\sigma \in (-\pi, +\pi)$ y a es una constante positiva conocida. Representar la cicloide. Encontrar las ecuaciones de movimiento empleando como coordenada generalizada el parámetro σ. Encontrar también las ecuaciones de movimiento utilizando ahora como coordenada el parámetro de arco s medido desde el punto más bajo de la cicloide. Demostrar que el periodo de las oscilaciones no depende de la amplitud de las mismas. Esta propiedad (*isocronía*) es la que motivó a Christian Huygens a diseñar este tipo de péndulo hacia 1673.

4 ***Sistemas de coordenadas móviles mediante el formalismo lagrangiano: plataforma rotante***

Una plataforma circular horizontal gira con velocidad angular constante y conocida Ω en torno a un eje vertical que pasa por su centro. Sobre la plataforma desliza sin rozamiento una masa m. La masa está unida a un muelle ideal de constante elástica κ y longitud natural nula cuyo extremo opuesto está fijado a un punto de la plataforma. El punto de anclaje del muelle se encuentra a una distancia R del centro de la plataforma. Considerar un sistema de referencia rotatorio cuyo origen O' se encuentra en el centro de la plataforma, el eje Z' es vertical y orientado hacia arriba, el eje X' es horizontal y pasa por el origen y el punto de anclaje del muelle, y el eje Y' completa un triedro ortogonal. Las coordenadas generalizadas a emplear en este ejercicio son las cartesianas (x', y') asociadas al sistema de referencia recién especificado. Determinar el lagrangiano y hallar las ecuaciones de movimiento. La interpretación de las ecuaciones obtenidas se detallará en el capítulo dedicado a los sistemas de referencia no inerciales.