MECÁNICA Y ONDAS I

Curso 2019/2020. Grupo 521

Hoja 1. MECÁNICA LAGRANGIANA: ECUACIONES DE LAGRANGE

1 ***Coordenadas generalizadas: (a) esféricas, (b) coordenada del centro de masas y coordenada relativa***

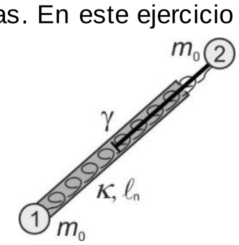
En este ejercicio se analizan dos sistemas de coordenadas, ambos muy importantes para el estudio del problema de los dos cuerpos. (a) Considerar un cuerpo de masa m y dimensiones despreciables sometido a una fuerza no especificada $\mathbf{f}$. Para describir la posición $\mathbf{x}$ de dicha partícula, emplear como coordenadas generalizadas q_j $(j = 1{,}2{,}3)$ las tres coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) respecto a un sistema de referencia inercial. Hallar los vectores tangentes a las líneas coordenadas, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}$, la energía cinética en función de coordenadas y velocidades generalizadas, y las ecuaciones diferenciales del movimiento (ecuación de Lagrange de 1ª especie). (b) Sean dos partículas puntuales de masas m_1, m_2 sometidas a fuerzas no especificadas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$. Para describir la configuración del sistema emplear las tres coordenadas cartesianas del centro de masas, $\mathbf{R}$, y las tres coordenadas cartesianas relativas, $\mathbf{r}$, dadas por:

$$\mathrm{R} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{M} \quad ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \,,$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. Del mismo modo que en el apartado anterior hallar: los vectores tangentes a las líneas coordenadas, la energía cinética, y las ecuaciones de movimiento. Con objeto de obtener expresiones sencillas y de interpretación atractiva es conveniente emplear el parámetro $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, conocido como la *masa reducida* del sistema de dos partículas y la masa total M, en lugar de las masas m_1, m_2.

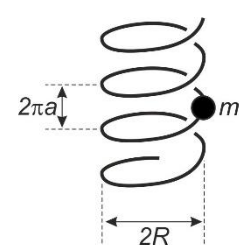
2 ***Ecuaciones de Lagrange (de 1ª especie) con fuerzas no conservativas: amortiguador***

Dos partículas de idéntica masa m_0 se mueven confinadas en un plano horizontal. Las partículas están conectadas por un amortiguador de masa despreciable. El amortiguador consta de un muelle ideal de constante elástica κ y longitud natural ℓ_n y de un dispositivo disipador que provee una fuerza de interacción entre las partículas causando así una atenuación del movimiento relativo entre ambas. En este ejercicio tomar dicha fuerza proporcional al módulo de la componente radial de la velocidad relativa con constante de proporcionalidad γ y dirigida según la recta que une a la pareja. Determinar el número de grados de libertad del sistema, escoger coordenadas generalizadas q_j apropiadas, calcular la energía cinética en función de $q_j, \dot{q}_j$, y encontrar las correspondientes ecuaciones de Lagrange. Sugerencia 1: para la elección de coordenadas se puede tener en cuenta el ejercicio 1(b) y, además, prestar atención a que las fuerzas de interacción son centrales. Sugerencia 2: para calcular las fuerzas generalizadas tener en cuenta el principio de acción y reacción.



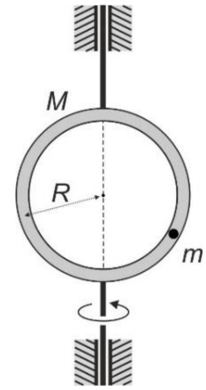
3 ***Ecuaciones de Lagrange (de 2ª especie): tobogán helicoidal***

Una cuenta de masa m está ensartada en un alambre con forma de hélice cilíndrica recta. El radio de la hélice es R y el paso de rosca es $2\pi a$, donde a es una constante positiva conocida. La hélice, cuyo eje es vertical, está fija respecto a un cierto sistema de referencia inercial. La masa está sometida a la fuerza peso y se despreciará cualquier rozamiento. Determinar el número de grados de libertad, escoger coordenadas generalizadas apropiadas, encontrar el lagrangiano, hallar las ecuaciones del movimiento, y resolverlas. Opcional: determinar y representar las ecuaciones de ligadura.



4 ***Grados de libertad y ligaduras: partícula contenida en un tubo circular***

Una partícula de masa m se introduce en un tubo con forma de circunferencia de radio R, de modo que queda ajustada al mismo pudiendo deslizar sin rozamiento por su interior. El centro del aro está fijo respecto a un cierto sistema de referencia inercial. Uno de sus diámetros, que se denominará el eje del sistema, se mantiene siempre en posición vertical mediante unos cojinetes. El aro, cuya masa es M, puede por tanto girar en torno a dicho eje vertical de rotación sin ningún tipo de rozamiento. Se consideran tres situaciones distintas: (a) la partícula desliza libremente sometida a la fuerza peso, mientras que un motor hace girar el aro en torno al eje con velocidad angular fija y conocida, Ω; (b) la partícula desliza libremente sometida a la fuerza peso, y se desconecta el motor de modo que el aro puede rotar libremente en torno a su eje; (c) el motor permanece desconectado de modo que el aro puede girar libremente, mientras que la partícula se desplaza por su interior con velocidad fija y conocida, v, respecto al tubo (se puede imaginar que la partícula ha sido sustituida por una aplicada hormiga que camina con ritmo constante comenzando en el instante $t = 0$ en el punto inferior del aro). En cada uno de los tres casos determinar: número de grados de libertad del sistema completo, coordenadas generalizadas apropiadas, ecuaciones de ligadura para la masa m, lagrangiano, ecuaciones del movimiento. Nota: el momento de inercia del aro respecto a uno de sus diámetros es $I = MR^2/2$.



5 ***Comparación de las formulaciones de Lagrange y de Newton: masa deslizando sobre una cuña móvil***

Considerar un bloque de masa M que se encuentra sobre un plano horizontal sobre el cual puede deslizar sin rozamiento. El bloque está perforado por un conducto rectilíneo que está inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal. En dicho orificio se encuentra una pequeña bola de masa m que puede deslizar por su interior. El sistema se encuentra sometido a la fuerza peso y todo el movimiento tiene lugar en el plano de la figura. Encontrar las ecuaciones de ligadura, el número de grados de libertad del sistema, coordenadas generalizadas adecuadas, el lagrangiano, las ecuaciones del movimiento, y resolverlas. Opcional: se recomienda encontrar las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Newton y comparar las ventajas y desventajas de los procedimientos newtoniano y lagrangiano.