Ejercicios Tema 2

Estimación I

Curso 2019-2020

2.1 Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim \Gamma(\alpha_0, \lambda)$, con α_0 conocido y λ desconocido. Determina el estadístico suficiente para λ. ¿Es directamente el EIMV? Determina a continuación el estimador máximo verosimil y comprueba que, efectivamente, es función del suficiente.

2.2 Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim f_{X,\theta}(x) = \begin{cases} e^{-x}e^{\theta} & \text{si } x > \theta \\ 0 & e.o.c \end{cases}$, con θ desconocido. Determina el estadístico suficiente para θ. Determina a continuación el estimador máximo verosimil y comprueba que, efectivamente, es función del suficiente. Así mismo, determina si es consistente y/o asintóticamente normal.¿Alguno de los estimadores anteriores alcanza la cota de Cramer-Rao?

2.3 $\star$ Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim exp(\lambda)$, con λ desconocido.

a) Determina la cota de Cramer-Rao.

b) Determina el estadístico suficiente para λ.

c) Determina el EIMV. Para ello, te puede resultar de utilidad el siguiente resultado: $\int_0^\infty e^{-px}x^{a-1}dx = \frac{\Gamma(a)}{p^a}$, donde $\Gamma(a) = (a-1)!$ si a es un número entero.

d) Determina si el EIMV es también eficiente.

e) Determina el estimador máximo verosimil.

f) Obten la estimación máximo verosimil para $P(X > 1)$ si se ha obtenido la siguiente m.a.s: 2;5;3.1;0.7;1.2;0.8.

g) Determina el estimador de los momentos.

2.4 Demuestra que los momentos muestrales respecto del origen A_r son estimadores consistentes para los correspondientes momentos poblacionales α_r.

2.5 Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim \beta(\alpha, \beta)$. Determina un estadístico suficiente para estimar α, suponiendo que $\beta = \beta_0$ es conocido, y otro para estimar β suponiendo que $\alpha = \alpha_0$ es conocido.

2.6 Consideremos una distribución teórica $N(\mu, \sigma)$ con $\mu = \mu_0$ conocida. Comprueba que $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ es un estimador centrado y consistente para σ^2. (Para comprobar que T es consistente hay que aplicar la LDGN a $Z_i = (X_i - \mu_0)^2$).

2.7 Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim U(0, \theta)$. Determina cuál debería ser el valor c del estimador $T = \hat{\theta}X_{(n)}$ para que su ECM sea mínimo (no tienes porqué restringirte al conjunto de los estimadores insesgados).

2.8 Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de X con distribución geométrica de parámetro p desconocido. Recuerda que la distribución geormétrica evalúa el número de pruebas de Bernoulli repetidadas que se requieren hasta el primer éxito.

a) Determina el estimador por el método de los momentos del parámetro p.

b) Determina el estimador de máxima verosimilitud (mv) del parámetro p y su distribución asintótica.

c) Se lanzó una moneda repetidamente hasta que se obtuvieron 4 caras, con los siguientes resultados: la primera cara se obtuvo en el tercer lanzamiento, en el siguiente lanzamiento también se obtuvo cara, la siguiente se obtuvo cinco lanzamientos después, y la cuarta cara tres lanzamientos después. Estima la probabilidad de obtener cara con esa moneda.

2.9 Consideremos la distribución teórica continua con la siguiente función de densidad

$$f_\theta(x) = (\theta+1)x^\theta \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \quad (\theta > 0) \ .$$

a) Determina el estimador por el método de los momentos para el parámetro θ.

b) Determina el estimador máximo verosimil para θ.

2.10 El valor de cierto índice de calidad de un tipo de mesas producidas en una fábrica tiene distribución normal. Se desea estimar los cuartiles de la distribución del índice para clasificar los productos obtenidos.

a) Obtén los estimadores máximo verosímiles de los cuartiles, basados en una m.a.s. de tamaño n.

b) El valor del índice para 9 productos elegidos al azar es: 76, 53, 63, 59, 72, 68, 61, 51 y 68. A partir de estos datos, obtén las estimaciones de los cuartiles.