Soluciones a los ejercicios

Nota importante: es imprescindible intentar realizar los ejercicios antes de mirar aquí sus soluciones.

PROBLEMA 1:

Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} : \ x^2 < 16\}$. Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$
2. $\{3, 1\} \in A$
3. $\{x \in \mathbb{Z} : \ |x| < 4\} \subset A$
4. $\emptyset \subset A$
5. $3 \in A$
6. $\{3\} \in A$
7. $A \subset \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
8. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

SOLUCIÓN. : V, F, V, V, V, F, F, V.

PROBLEMA 2:

Si $A \cap B = A \cap C$, ¿tiene que ser B = C? Si $A \cup B = A \cup C$, ¿tiene que ser $B = C$?

SOLUCIÓN. La respuesta en negativa en ambos casos. Se puede ver muy fácilmente con diagramas de Venn.

PROBLEMA 3:

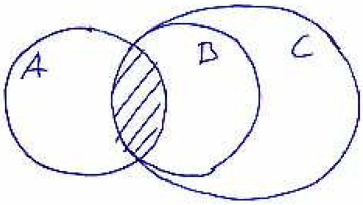
Utilizando diagramas de Venn comprobar que

$$(A \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C),$$

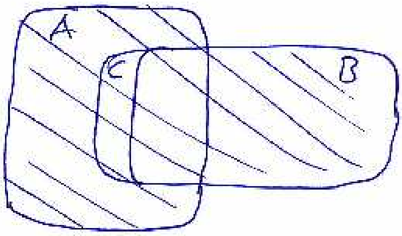
donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, y siendo $A \setminus B = A - B$. ¿Es en general una igualdad esa relación de contenido?

SOLUCIÓN. La relación de contenido no es en general una igualdad, como se desprende fácilmente de los diagramas.

2



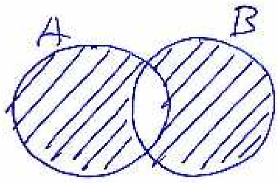
$A \cap B = A \cap C$

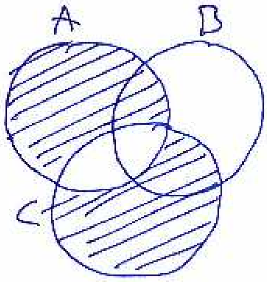


$A \cup B = A \cup C$

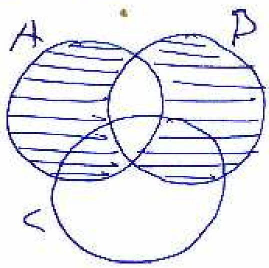
3

$A \triangle B$

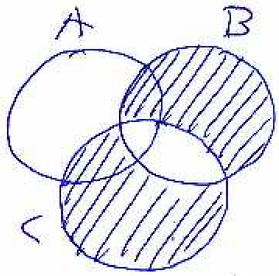




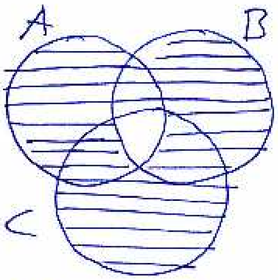
$A \triangle C$



$A \triangle B$



$B \triangle C$



$(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

$A \triangle C \neq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

PROBLEMA 4:

Elegir la opción verdadera de las siguientes afirmaciones:

1. $\emptyset \subset \{0\}$
2. $0 \in \emptyset$
3. $\emptyset \in 0$
4. $0 \subset \emptyset$

SOLUCIÓN. La primera. El conjunto vacío está contenido dentro del conjunto que contiene al elemento 0.

PROBLEMA 5:

Usando diagramas de Venn encontrar cuál de las siguientes afirmaciones entre los conjuntos A y B es falsa:

1. $A \cap B = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $A \cup (A \cap B) = A$
4. $A \cap (A \cup B) = A$

SOLUCIÓN.

La primera.

Otra forma sencilla de demostrar la falsedad de una afirmación es dar un contraejemplo:

Sean $A = \{1, 4\}, \quad B = \{2, 4, 5, 6\}, \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Entonces:

$A \cap B = \{4\}$ Pero

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\{1, 4\}} \cup \overline{\{2, 3, 4, 5\}} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Por tanto en general $A \cap B \neq \overline{A} \cup \overline{B}$.

PROBLEMA 6:

Usando diagramas de Venn encontrar cuál de las siguientes afirmaciones entre los conjuntos A y B es falsa:

1. $A \cup (B \setminus A) = A \cap B$
2. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
4. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

<u>Solución.</u>

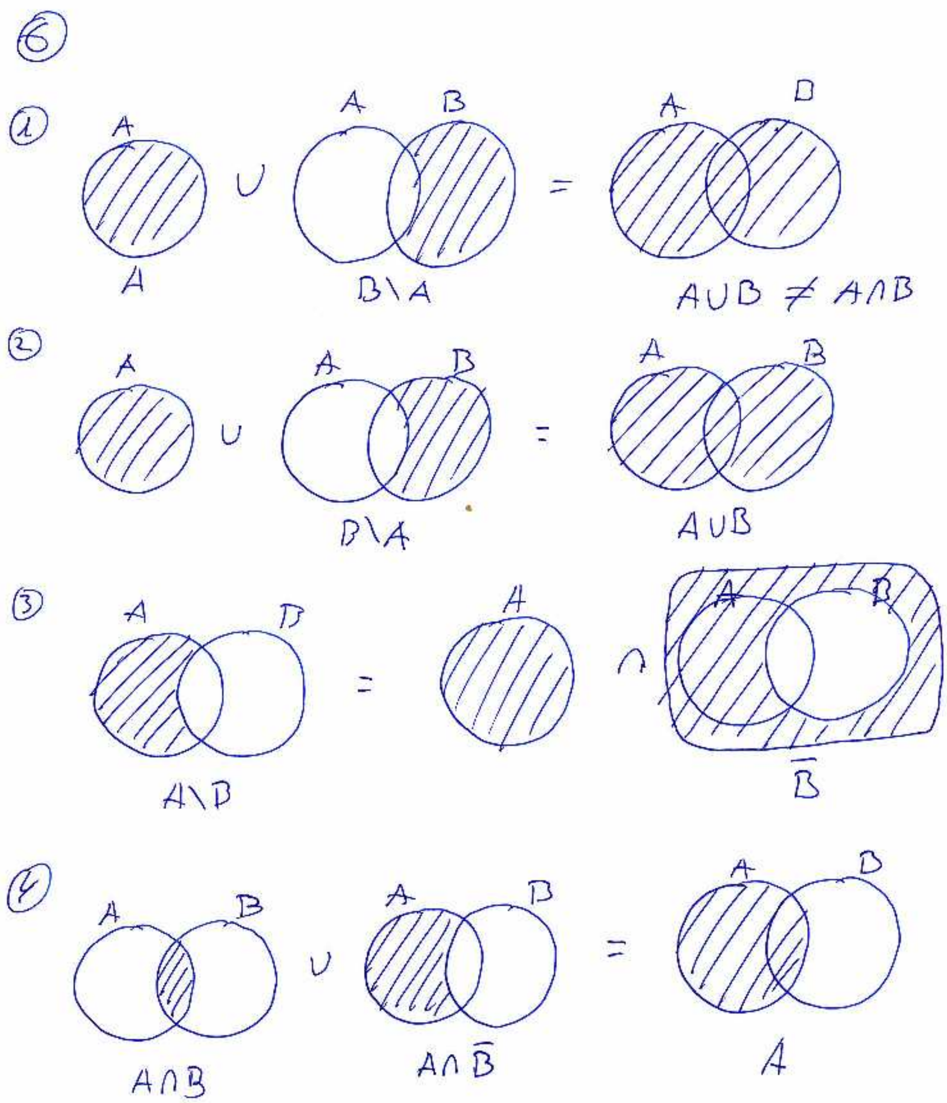
La primera.

Otra forma sencilla de demostrar la falsedad de una afirmación es dar un contraejemplo:

Sean $A = \{1, 4\}$, $\quad B = \{2, 4, 5, 6\}$, $\quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Entonces $A \cap B = \{4\}$.

Por otro lado $B \setminus A = \{2, 5, 6\}$, así que $A \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 4, 5, 6\} \neq \{4\} = A \cap B$



PROBLEMA 7:

Simplificar la siguiente expresión:

$$\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup B)}$$

Solución.

Teniendo en cuenta la ley de Morgan: $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ podemos reescribir la expresión del siguiente modo: $(A \cap B) \cup (\overline{\overline{A} \cup B})$ y aplicando lo mismo a la segunda parte de la expresión tenemos $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ y teniendo en cuenta la propiedad distributiva $((A \cap B) \cup A) \cap (A \cap B \cap \overline{B}) = A \cap A = A$, pues $B \cap \overline{B} = \emptyset$.

PROBLEMA 8:

Demostrar que se verifican las siguientes igualdades:

1. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
3. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
4. $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$

Solución.

1. (Obvia)
2. Es obvia, basta usar unos digramas de Venn.
3. Propiedad asociativa de la diferencia simétrica.
4. Si tenemos en cuenta que $A \triangle C = A \cup C \setminus A \cap C$ y asumimos que $C = A \cap B$ entonces la segunda parte de la igualdad será $A \cup (A \cap B) \setminus A \cap (A \cap B)$ y por tanto $A \setminus B$.

PROBLEMA 9:

Simplificar la expresión:

$$\overline{(\overline{[(A \cup B) \cap C]} \cup \overline{B})}$$

Solución.

Usando la ley de Morgan obtenemos $[[(A \cup B) \cap C] \cap B]$ que es igual a $(A \cup B) \cap B \cap C$, y como los tres primeros miembros son B el resultado pedido es $B \cap C$.

PROBLEMA 10:

1. ¿Cuál de los siguiente conjuntos es $\mathcal{P}(A)$ para algún conjunto A?

$$\emptyset, \quad \{\emptyset, a\}, \quad \{\emptyset, \{a\}\}, \quad \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}, \quad \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

2. Determinar el cardinal de los siguientes conjuntos:

$$A = \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\}), \quad B = \mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$$

<u>SOLUCIÓN.</u>

1. La tercera y última expresión.
2. 8, 16 y 2 respectivamente.

<u>PROBLEMA 11:</u>

Si $|A| = 55$, $|B| = 40$, $|C| = 80$, $|A \cap B| = 20$, $|A \cap B \cap C| = 17$, $|B \cap C| = 24$ y $|A \cup C| = 100$, hallar

1. $|A \cap C|$
2. $|C \setminus B|$
3. $|(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)|$.

<u>SOLUCIÓN.</u>

1. Como $|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C|$ entonces $100 = 55 + 80 - |A \cap C|$
2. $80 - 24 = 56$.
3. $24 - 17 = 7$.

<u>PROBLEMA 12:</u>

Un biólogo trabaja con 66 especies de plantas, de las cuales 29, 41 y 25 viven en ecosistemas de tipo A, B y C respectivamente. Sabiendo que 16 pueden vivir tanto en ecosistemas A como B, 8 en ecosistemas A y C, y 7 en ecosistemas B y C, obtener el número de especies que pueden estar presentes en los tres ecosistemas. Calcular también el número de especies que pueden vivir en ecosistemas de tipo A y B pero que no pueden vivir en los de tipo C.

<u>SOLUCIÓN.</u> Vamos a echar mano del principio de inclusión exclusión para tres conjuntos:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

En este caso tendremos podemos traducirlos a números según el enunciado de la siguiente manera:
$66 = 29 + 41 + 25 - 16 - 8 - 7 + |A \cap B \cap C|$. Despejado $|A \cap B \cap C|$ que es lo que nos piden sale 2
Sobre el número de especies que pueden vivir en ecosistemas de tipo A y B pero que no pueden vivir en los de tipo C se puede deducir fácilmente que son 14, es decir $16 - 2$.

<u>PROBLEMA 13:</u>

Sea la función $f(x) = \lceil x \rceil$ la "función parte entera por arriba" (función techo) y $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función "parte entera por abajo" (función suelo). Así por ejemplo $\lceil 1{,}1 \rceil = 2$ y $\lfloor 0{,}3 \rfloor = 0$. Entonces calcular:

a) $\lceil 3/4 \rceil$
b) $\lfloor 7/8 \rfloor$
c) $\lceil -3/4 \rceil$
d) $\lfloor -7/8 \rfloor$

SOLUCIÓN.

a) 1 b) 0 c) 0 d) -1

PROBLEMA 14:

1. Usar la propiedad $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$ para calcular $\lceil 3{,}01 \rceil$
2. Demostrar la falsedad o vercidad de la expresión: $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

SOLUCIÓN.

1. $\lceil 3{,}01 \rceil = \lceil 0{,}01 + 3 \rceil = \lceil 0{,}01 \rceil + 3 = 1 + 3 = 4$
2. La expresión $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ es falsa. Basta un contraejemplo para demostralo $\lceil 1/2 + 1/2 \rceil = 1$, pero $\lceil 1/2 \rceil + \lceil 1/2 \rceil = 1 + 1 = 2$

PROBLEMA 15:

Determinar si las siguientes funciones son biyecciones:

a) $f(x) = 2x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 1$
c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = (x^2+1)/(x^2+2)$

SOLUCIÓN.

Sí, No, Sí, No.

PROBLEMA 16:

En un grupo de 15 personas hay 7 que tienen nacionalidad francesa, 8 que tienen nacionalidad británica y otros 8 que tienen nacionalidad española. Además hay 2 que son británicos y españoles a la vez, 4 que son españoles y franceses simultáneamente y 3 que tienen la doble nacionalidad británica y francesa. ¿Cuántos tienen triple nacionalidad?

SOLUCIÓN.

Por el principio de inclusión exclusión es fácil ver que sólo hay uno.
$|(E \cap B \cap F)| = 15 - 7 - 8 - 8 + 2 + 4 + 3 = 1$

PROBLEMA 17:

En un grupo de 12 estudiantes hay 7 matriculados en Matemática Discreta, 9 que están matriculados en Álgebra y 10 en Estadística. Además se sabe que hay 3 que están matriculados en las tres a la vez, en Álgebra y Estadística hay hay 8, y 5 que lo están en Estadística y Discreta simultáneamente. ¿Cuántos están matriculados en Álgebra y Discreta?

Solución. Por el principio de inclusión exclusión es fácil ver que sólo hay uno.
$|(E \cap A \cap D)| = 3 = 12 - 9 - 10 - 7 + 8 + 5 + |A \cap D|$ y despejando obtenemos $|A \cap D| = 4$

PROBLEMA 18:

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de divisibilidad

$$a\mathcal{R}b \iff a \mid b\,.$$

Teniendo en cuenta que el digrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, |\,)$ que se muestra en la figura.

(a) Encontrar (si existen) los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Dado el subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, encontrar (si existen) los conjuntos mayorante y minorante y el supremo e ínfimo de B.

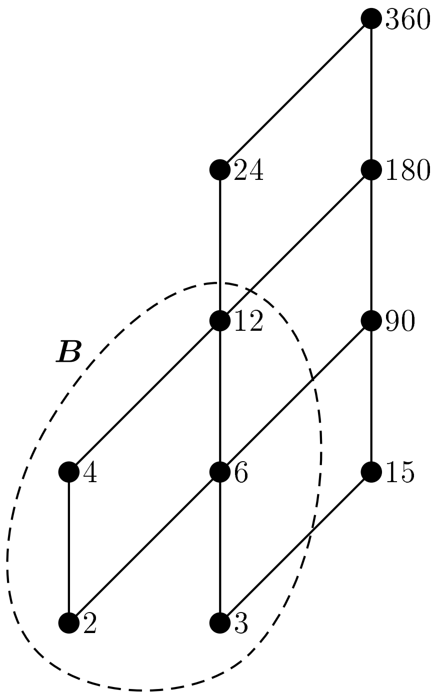


Figura 1: El diagrama de Hasse asociado al problema.

Solución.

a) El único elemento maximal de A es 360, luego, al tratarse de un conjunto finito, $\text{máx}(A) = 360$. Los elementos minimales de A son $\{2, 3\}$ y por tanto no existe $\text{mín}(A)$.

b) El conjunto mayorante de B es $\text{mayor}(B) = \{12, 24, 180, 360\}$, luego $\sup(B) = 12$. El conjunto minorante de B es $\text{minor}(B) = \emptyset$, luego no existe $\text{ínf}(B)$.

PROBLEMA 19:

Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 84, excluyendo el 1, mediante

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; a \text{ divide a } b\,.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.

2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

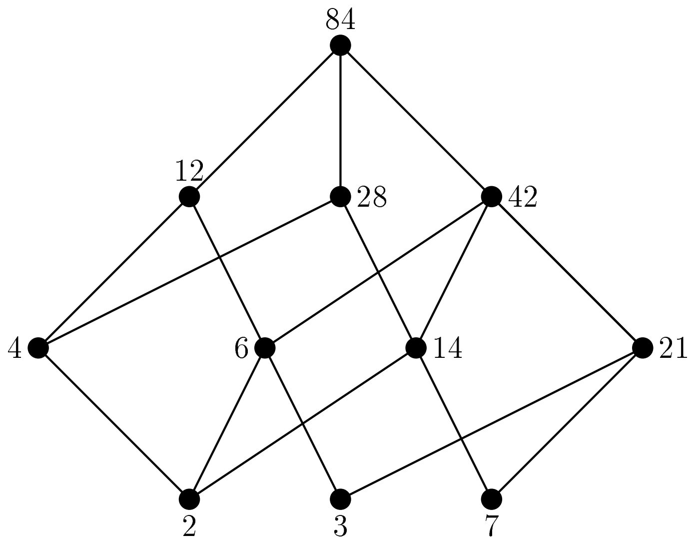
3. Dar, si existen, el conjunto de cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo en $(D, \preceq)$ del conjunto $B = \{2, 3, 6, 28\} \subset D$.

SOLUCIÓN.

1) Es trivial enumerar los elementos que forman parte del conjunto D. En concreto

$$D = \{2, 3, 7, 4, 6, 14, 21, 12, 28, 42, 84\} .$$

El diagrama de Hasse asociado al conjunto parcialmente ordenado $(D, \preceq)$ es



2) Trivialmente 84 es maximal y máximo; 2, 3, 7 son minimales y no hay mínimo.

3) El conjunto de las cotas superiores de B es $\{84\}$ por lo que 84 es el supremo. El conjunto de las cotas inferiores de B es vacío por lo que no hay ínfimo.

PROBLEMA 20:

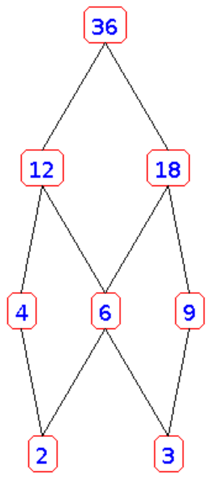
Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 36 , **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \iff a \text{ divide a } b\, .$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.

2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

<u>SOLUCIÓN.</u>



Maximales: 36. Mimales: 2 y 3. Máximo: 36. No existe mínimo.

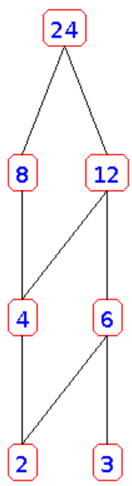
<u>PROBLEMA 21:</u>

Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 24 , **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b \,.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.
2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

<u>SOLUCIÓN.</u>



Maximales: 24. Minimales; 2 y 3. Máximo: 24. No existe mínimo.

PROBLEMA 22:

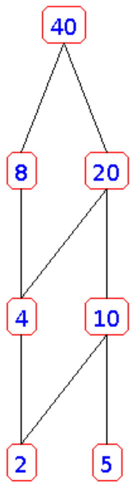
Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 40 , **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; a \text{ divide a } b\,.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.

2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

SOLUCIÓN.



Maximales: 40. Minimales 2 y 5. Máximo: 40. No existe mínimo.

PROBLEMA 23:

Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$(a_1, a_2, a_3)\; \mathcal{R}\; (b_1, b_2, b_3) \;\Leftrightarrow\; a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN.

Para demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia hay que demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva. Definamos la función $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, entonces $\vec{a}\,\mathcal{R}\,\vec{b} \;\Leftrightarrow\; f(\vec{a}) = f(a_1, a_2, a_3) = f(b_1, b_2, b_3) = f(\vec{b})$. Esta observación simplifica el razonamiento:

- Reflexiva: $f(\vec{a}) = f(\vec{a})$, luego $\vec{a}\mathcal{R}\vec{a}$.

- Simétrica: Si $\vec{a}\mathcal{R}\vec{b}$, entonces $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, y por tanto $f(\vec{b}) = f(\vec{a}) \Rightarrow \vec{b}\mathcal{R}\vec{a}$.

- Transitiva: Si $\vec{a}\mathcal{R}\vec{b}$ y $\vec{b}\mathcal{R}\vec{c}$, entonces $f(\vec{a}) = f(\vec{b}) = f(\vec{c})$. Luego, $\vec{a}\mathcal{R}\vec{c}$.

Dado un cierto $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$f(a_1, a_2, a_3) \;=\; a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A^2 \geq 0\,.$$

La clase de equivalencia que contiene al vector $\vec{a}$ estará formada por todos aquellos puntos $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ que satisfagan $f(\vec{b}) = A^2$. Resulta entonces evidente que las clases de equivalencia vienen dadas por superficies esféricas en $\mathbb{R}^3$ parametrizadas por el valor de su radio $A \geq 0$. Obviamente, la intersección de dos esferas de distinto radio es vacía. Además, es posible representar cada una de las clases de equivalencia usando el único punto en el que el semi-eje positivo $x \geq 0$ corta a la correspondiente esfera. De este modo, los elementos del conjunto cociente son de la forma

$$[(A,0,0)]_{\mathcal{R}} \;=\; \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A^2\}\,.$$

y se tiene que

$$\mathbb{R}^3/\mathcal{R} \;=\; \{[(A,0,0)]_{\mathcal{R}} \;\mid\; A \in \mathbb{R}_+\}\;.$$

PROBLEMA 24:

Sea el conjunto $V = \{x \mid 1 \leq x \leq 20\} \subset \mathbb{N}$. Sea el producto cartesiano $V \times V$ y sobre él definimos la siguiente relación

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(a,b) \;\Leftrightarrow\; x + b \;=\; y + a\,.$$

1. Demostrar que es una relación de equivalencia.
2. Calcular las clases de equivalencia. ¿Cuál es la clase que tiene mayor número de elementos? ¿Cuál es la clase que tiene menor número de elementos?
3. Calcular el conjunto cociente $(V \times V)/\mathcal{R}$ y decir su número de elementos.

SOLUCIÓN.

1) $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia porque es de la forma $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ si y sólo si $f(x,y) = f(a,b)$ con $f(x,y) = x - y$. La demostración detallada de este punto se encuentra en el problema 1 de este documento.

2) Las clases de equivalencia son de la forma $x - y =$ constante. La constante etiqueta las clases de equivalencia y puede tomar valores entre -19 y 19. Por ejemplo la clase de equivalencia del $(1,1)$ corresponde a tomar dicha constante igual a cero y contiene a los elementos

$$[(1,1)]_{\mathcal{R}} \;=\; \{(x,x) \mid 1 \leq x \leq 20\}\,.$$

En general podemos escribir las $19 \cdot 2 + 1 = 39$ clases de equivalencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [(x,1)]_{\mathcal{R}} &= \{(x+a, 1+a) \mid 0 \leq a \leq 20 - x\}\,, \qquad 1 \leq x \leq 20\,,\\ [(1,x)]_{\mathcal{R}} &= \{(1+a, x+a) \mid 0 \leq a \leq 20 - x\}\,, \qquad 2 \leq x \leq 20\,. \end{aligned}$$

En la segunda línea hemos suprimido el caso $x = 1$, al haberlo tenido en cuenta en la primera línea.
El número de elementos de cada clase es

$$\begin{aligned} |[(x,1)]_{\mathcal{R}}| &= 21 - x\,, \qquad 1 \leq x \leq 20\,,\\ |[(1,x)]_{\mathcal{R}}| &= 21 - x\,, \qquad 2 \leq x \leq 20\,. \end{aligned}$$

Luego la clase con mayor número de elementos será la $[(1,1)]_{\mathcal{R}}$ que tiene 20 elementos. Las clases con menor número de elementos serán $[(1,20)]_{\mathcal{R}}$ y $[(20,1)]_{\mathcal{R}}$ con un sólo elemento.

3) El conjunto cociente $(V \times V)/\mathcal{R}$ tendrá 39 elementos y será igual a

$$(V \times V)/\mathcal{R} \;=\; \{[(x,1)]_{\mathcal{R}} \mid 1 \leq x \leq 20\} \,\cup\, \{[(1,x)]_{\mathcal{R}} \mid 2 \leq x \leq 20\}\;.$$

PROBLEMA 25:

Considera la siguiente relación definida en $\mathbb{N}$:

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z}_+ \;:\; y = 2^k x\,.$$

(a) Demuestra que $(\mathbb{N},\mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado.

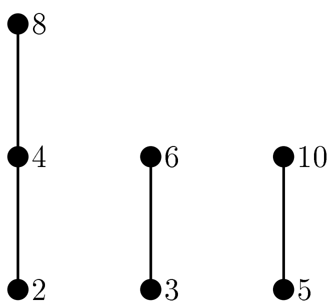
(b) Sea $X = \{2,3,4,5,6,8,10\}$. Dibuja el diagrama de Hasse de $(X,\mathcal{R})$.

(c) Encuentra, si existen, el máximo, el mínimo, los elementos maximales y minimales y las cotas superiores e inferiores del conjunto $X \subset \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

a) La relación será una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La reflexividad de $\mathcal{R}$ se sigue directamente de la igualdad $x = 2^k x$, valida para $k = 0 \in \mathbb{Z}_+$.
Para demostrar que la relación satisface la propiedad antisimétrica debemos comprobar que si se cumple que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ entonces necesariamente se sigue que $x = y$. En este punto es crucial darse cuenta de que la antisimetría de la relación es consecuencia de que únicamente estamos considerando enteros no negativos en los exponentes de 2^k. Si no fuera así, aun en el caso en que $x \neq y$, dado un k tal que $x = 2^k y$, bastaría tomar $-k$ para tener $y = 2^{-k}x$.
Para demostrar que $\mathcal{R}$ satisface la propiedad transitiva debemos demostrar que, si $x = 2^{\ell}y$ e $y = 2^m z$, entonces necesariamente $x = 2^k z$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera tenemos que, en efecto, $x = 2^{\ell}2^m z = 2^{\ell+m}z = 2^k z$, con $k = \ell + m \in \mathbb{Z}_+$.

b) El diagrama de Hasse pedido es el siguiente:



c) El conjunto de los elementos maximales de $(X,\mathcal{R})$ es $\{8,6,10\}$. Por su parte, $\{2,3,5\}$ es el conjunto de los elementos minimales. Obviamente no hay ni máximo ni mínimo en $(X,\mathcal{R})$.
Finalmente, tanto el conjunto de las cotas inferiores como el de las cotas superiores de $X \subset \mathbb{N}$ son vacíos.

PROBLEMA 26:

Resolver las siguientes cuestiones:

1. Calcular el número de maneras de colocar en un tablero de ajedrez orientado y con 64 casillas las siguientes piezas: un rey, una reina, un caballo, una torre y un alfil blancos y un rey, una torre, un caballo y un alfil negros.
2. En los alambres que hay entre dos postes de un tendido trifásico de alta tensión en Bodega Bay se distribuyen 99 mirlos indistinguibles. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en los tres alambres si no consideramos la distancia entre pájaros?
3. Si, por el contrario, tenemos en cuenta la distancia entre pájaros y si en cada alambre solo hay 200 posiciones posibles para los pájaros, ¿de cuántas maneras se pueden colocar los 99 mirlos?

NOTA: Los resultados se darán en función de números combinatorios $\binom{a}{b}$ y/o factoriales $a!$

SOLUCIÓN.

1) Las piezas de ajedrez son todas distintas entre sí y las casillas del ajedrez también son distintas entre sí (al estar orientado). Por lo tanto debemos colocar $5 + 4 = 9$ piezas distintas en $8^2 = 64$ casillas distintas. La primera pieza la podemos colocar de 64 maneras, una vez colocada, podemos colocar la segunda de 63 maneras distintas, etc. Una vez colocadas las ocho primeras piezas, hay $64 - 8 = 56$ maneras de colocar la última pieza. Luego, la solución del problema es

$$64 \cdot 63 \cdot 62 \cdots 57 \cdot 56 = \frac{64!}{55!} = 9993927307714560\,.$$

También se podría hacer de la siguiente manera: hay $\binom{64}{9}$ maneras de elegir las 9 casillas a ocupar y, una vez elegidas, hay 9! maneras de colocar las 9 piezas en ellas. Luego, la solución es $\binom{64}{9}\,9! = 64!/55!$

2) Tenemos que distribuir 99 objetos iguales (los mirlos) en 3 cajas distintas (los alambres). Como en cada alambre puede haber cualquier número de mirlos (incluido ninguno), el resultado es

$$\binom{99+2}{2} = \binom{101}{2} = 5050\,.$$

3) En este caso, las posiciones de los mirlos son distinguibles. De hecho hay 600 posiciones posibles que pueden ocupar los 99 mirlos. Luego habrá

$$\binom{600}{99}$$

maneras de colocar a los 99 mirlos.

PROBLEMA 27:

Resolver los siguientes problemas:

(a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir diez bolas idénticas en seis recipientes distintos?

(b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si ningún recipiente puede quedar vacío?

(c) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si el cuarto recipiente contiene un número impar de bolas?

SOLUCIÓN.

a) Representamos cada bola mediante un cuadrado y cada recipiente por un par de barras. El enunciado nos dice que las bolas son idénticas; pero los recipiente no lo son. Una manera posible de hacer el reparto es la siguiente:

$$| \square\,\square\,\square \,|\, \square\,\square\,\square \,|\quad|\, \square\,\square\,\square\,\square \,|\;|\;|$$

Los restantes repartos se obtienen reordenando los objetos que aparecen en la representación anterior. En concreto, contamos con siete barras; pero las dos de los extremos no las podemos mover, de manera que sólo hay cinco barras móviles y diez cuadrados. Como no hay ninguna restricción en la manera de colocar las barras y los cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{10+5}{5} = \binom{15}{5} = 3003\,.$$

b) Si ningún recipiente puede quedar vacío, el argumento es el casi el mismo que en el apartado a). La única diferencia es que ahora las cinco barras móviles hay que colocarlas obligatoriamente entre dos cuadrados para que siempre haya al menos un cuadrado en cada recipiente (es decir, entre dos barras consecutivas). Una reparto posible es el siguiente:

$$| \square\,\square \,|\, \square\,\square \,|\, \square \,|\, \square\,\square\,\square \,|\, \square \,|\, \square \,|$$

Como hay nueve espacios entre los diez cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{9}{5} = 126\,.$$

c) Si el cuarto recipiente tiene un numero impar de bolas, sólo puede contener $1, 3, 5, 7$ ó 9 bolas. En el primer caso, tendríamos una bola en dicho recipiente y nueve bolas en el resto a colocar sin ninguna restricción en los cinco recipientes restantes. Usando el mismo argumento que en el primer apartado, la solución de este caso sería $\binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4}$.
Si colocamos 3 bolas en el cuarto recipiente, tenemos que situar las siete bolas restantes en los cinco recipiente que nos quedan. La solución es $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$. Claramente si colocamos k bolas en el cuarto recipiente, el número de maneras de situar las $10-k$ bolas restantes en los cinco recipientes es $\binom{10-k+5-1}{5-1} = \binom{14-k}{4}$. La solución pedida es por tanto

$$\binom{13}{4} + \binom{11}{4} + \binom{9}{4} + \binom{7}{4} + \binom{5}{4} = 1211\,.$$

PROBLEMA 28:

Determinar el número de subconjuntos de un conjunto de 10 elementos que

(a) tengan menos de 5 elementos,

(b) tengan más de 7 elementos,

(c) tengan un número impar de elementos.

Solución.

La manera más rápida de solucionar este problema es aprovechar la biyección entre el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos y el de las cadenas binarias de longitud n, de manera que si un elemento pertenece a un subconjunto dado, el bit correspondiente es 1 (y 0 en caso contrario).

El apartado a) nos pide el número de cadenas de bits de longitud 10 con menos de 5 unos. El número de cadenas de bits de longitud 10 con k unos es simplemente

$$N_k = \binom{10}{k}, \qquad 0 \leq k \leq 10\,.$$

De esta modo, la solución de a) es

$$N_{k<5} = \sum_{k=0}^{4} N_k = \sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} = 1 + 10 + \frac{90}{2} + \frac{720}{3!} + \frac{10!}{6!\,4!} = 386\,.$$

El apartado b) consiste en calcular el número $N_{k>7}$ de cadenas de bits de longitud 10 con más de 7 unos. Luego,

$$N_{k>7} = \sum_{k=8}^{10} N_k = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} = \frac{90}{2} + 10 + 1 = 56\,.$$

El apartado c) consiste en calcular el número de cadenas de bits de longitud 10 con un número impar de unos. Luego,

$$\begin{aligned} N_{k \text{ impar}} &= \sum_{p=0}^{4} N_{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{4} \binom{10}{2p+1} \\ &= 2\left[\binom{10}{1} + \binom{10}{3}\right] + \binom{10}{5} \\ &= 512\,. \end{aligned}$$

El resultado es lógico ya que el número total de cadenas de bits de longitud 10 es $2^{10} = 1024$ y aquellas con un número impar de unos serán, por simetría, la mitad (i.e., 512).

PROBLEMA 29:

¿De cuantas maneras se pueden recolocar las letras de la palabra BASEBALL de tal modo las nuevas palabras empiecen y terminen por vocal?

Solución.

$$N = 3\frac{6!}{2!2!}$$

PROBLEMA 30:

¿De cuantas maneras se pueden recolocar las letras de la palabra MISSISSIPPI de tal modo las nuevas palabras empiecen por I? ¿Y para que la P estén juntas?

SOLUCIÓN.

$$N = \frac{10!}{3!4!2!}$$

$$N = 10\frac{9!}{4!4!}$$

PROBLEMA 31:

Dado el conjunto de símbolos $\{a, a, a, a, a, b, b, b, c, d, d\}$ ¿Cuántas palabras de 11 letras se pueden formar reordenando sus elementos?

SOLUCIÓN.

$$N = \frac{11!}{5!3!1!2!}$$

PROBLEMA 32:

De cuantas maneras se puede obtener una mano de 3 espadas y 2 bastos de una baraja española de 40 cartas.

SOLUCIÓN.

$$N = \binom{10}{3} \cdot \binom{10}{2} = 120 \times 45 = 5400$$

PROBLEMA 33:

De un grupo de 12 estudiantes se quiere enviar a 4 delegados a una convención. ¿De cuántas maneras se puede hacer? ¿Y si dos no pueden asistir juntos? ¿Y si 2 que están casados sólo pueden ir juntos?

SOLUCIÓN.

- Como hay 12 si elegimas 4 de ellos tendremos

$$\binom{12}{4} = 495$$

- Los otros dos miembros de la delegación pueden elegirse de

$$\binom{10}{2}$$

maneras distintas, así que lo pedido es

$$\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 450$$

- Si los casados no van $\binom{10}{4} = 210$, si van $\binom{10}{2} = 45$. Así que $N = 210 + 45 = 255$ maneras.

PROBLEMA 34:

Demostrar que $3^{2n}+7$ es divisible por 8 para todo n. Es decir, nos piden que demostremos el siguiente enunciado:

$P(n) : 8|(3^{2n}+7)$.

SOLUCIÓN.

Paso base:
Podemos comprobar que se cumple para $k=1$ porque $9+7=16$ y $8|16$ (16 es divisible por 8).

La hipótesis de inducción es precisamente: $P(k) : 8|(3^{2k}+7)$

Paso de inducción:
Veamos que pasa para $k+1$:

$f(k+1) = 3^{2(k+1)} + 7 = 3^{2k+2} + 7 = 3^2 3^{2k} + 7 = 9 \cdot 3^{2k} + 7$

Obsérvese que todavía no hemos usado la hipótesis de inducción, sólo hemos jugado con la expresión, que podemos seguir desarrollando:

$f(k+1) = 8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} + 7 = 8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k}+7)$

Esta última expresión tiene dos sumandos. El primero es múltiplo de 8 al estar multiplicado por 8. Así que hasta este punto podemos decir algo acerca de su divisibilidad por 8 sin necesidad de recurrir a la hipótesis de inducción. Todas las operaciones iban encaminadas precisamente hacia este punto y no eran un mero masaje de fórmulas. Se necesita cierta "picardía" para encaminar las expresiones hacia donde queremos llegar.

Es ahora cuando podemos usar el principio de inducción. La expresión para $k+1$ será divisible por 8 si ambos sumandos que la componen son divisibles por 8. Lo es el primero por matemática elemental y el segundo es justamente la hipótesis de inducción. Luego como $P(k+1) : 8|(8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k}+7))$ es cierta si la hipótesis de inducción $P(k) : 8|(3^{2k}+7)$ es cierta, por el principio de inducción podemos concluir que $3^{2n}+7$ es divisible por 8 para todo n, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 35:

Demostrar que $n! > 3^n$ para todo $n > 7$, en donde el factorial se define de la forma habitual $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1))$.

SOLUCIÓN. Paso base:

vemos que para $k=6$ la desigualdad no se cumple, pues 720 no es mayor que 729, pero para $k=7$ sí, pues 5040 es mayor que 2187.

Hipótesis de inducción: $P(k) : k! > 3^k$

Paso inductivo:
La expresión para $k+1$ para el lado izquierdo será $(k+1)!$ y para el derecho 3^{k+1}, que podemos simplificar como $(k+1)k!$ y $3 \cdot 3^k$ respectivamente. Todavía no podemos decir nada acerca de

si cumple o no la desigualdad.

Para que $(k+1)k! > 3 \cdot 3^k$ sea cierto lo primero que debe cumplirse es que $k+1$ sea mayor que 3, cosa que ocurre siempre, porque debido al paso base $k > 6$. Lo que resta es justo que se cumpla la hipótesis de inducción $P(k) : k! > 3^k$.

Así que la desigualdad se cumple para $k+1$ si la hipótesis de inducción es cierta, luego por el principio de inducción:

$n! > 3^n$ para todo $n > 7$

PROBLEMA 36:

Demostrar por inducción que 3 divide a $n^3 - n$ a partir de cierto n.

SOLUCIÓN.

Paso base:
Si $n = 2$ vemos que $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ y $3|6$.

Hipótesis de inducción para un entero k arbitrario: $P(k) : 3|(k^3 - k)$

Veamos que pasa para $k+1$:

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 2k$$

En donde simplemente hemos operado. Ahora debemos agrupar para conseguir que la hipótesis de inducción aparezca en algún momento.

$$k^3 + 3k^2 + 2k = \underbrace{(k^3 - k)}_{a} + \underbrace{3(k^2 - k)}_{b}$$

Paso inductivo:
La expresión completa será divisible por tres si todos los sumandos lo son. Vemos que el segundo sumando de la última expresión (b) es tres veces algo, así que necesariamente es divisible por tres. Entonces la expresión $P(k+1) : 3|(k+1)^3 + (k+1)$ es cierta si la hipótesis de inducción (a) es cierta. Por tanto, según el principio de inducción $3|(n^3 - n)\ \forall n \geq 2$, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 37:

Demostrar por inducción que $1 + 2^n < 3^n\ \forall n \geq 2$.

Solución.

Paso base:
Veamos si se cumple el paso base.
Para $n = 1$ tenemos que $1 + 2^n = 1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ y $3^n = 3^1 = 3$, pero $3 \not< 3$. Sin embargo para $n = 2$ tenemos que $1 + 2^n = 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ y $3^n = 3^2 = 9$ y $5 < 9$ así que ya tenemos paso base.
Hipótesis de inducción para un k arbitrario pero fijo: $1 + 2^k < 3^k$

Paso inductivo:
Veamos que pasa para $k + 1$:

$$1 + 2^{k+1} = 1 + 2 \cdot 2^k = 1 + 2^k + 2^k$$

que debe ser menor que $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k = 3^k + 3^k + 3^k$

Así que

$$2^k + 1 + 2^k < 3^k + 3^k + 3^k$$

se cumplirá si la hipótesis de inducción es cierta, pues

$$2^k + 3^k < 3^k + 2 \cdot 3^k$$

es cierta, ya que $2^k < 2 \cdot 3^k$

Por tanto, por el principio de inducción:

$$1 + 2^n < 3^n \ \forall n \geq 2,$$

como queríamos demostrar.

PROBLEMA 38:

Demostrar por inducción que 3 divide a $n(n + 1)(n + 2)$ a partir de cierto n.

Solución.

Paso base:
Para $n = 1$ tenemos que: $n(n + 1)(n + 2) = 1(1 + 1)(1 + 2) = 6$ y claramente $3|6$.

Hipótesis de inducción para un k arbitrario:

$$P(k) : 3|k(k + 1)(k + 2)$$

Vamos a ver qué pasa para $k + 1$:

$$(k + 1)(k + 1 + 1)(k + 1 + 2) = (k + 1)(k + 2)(k + 3) = \underbrace{(3 + k)}_{\alpha}\underbrace{[(k + 1)(k + 2)]}_{\beta}$$

Simplemente hemos operado, simplificado y recolocado los distintos términos. Ahora nos podemos fijar en α, que tiene un tres dentro de él que podemos aprovechar. Así que multiplicamos ese 3 por β y el k que queda de α ambos por β:

$$(3 + k)[(k + 1)(k + 2)] = \underbrace{3(k + 1)(k + 2)}_{primer} + \underbrace{k(k + 1)(k + 2)}_{segundo}$$

Paso inductivo:
El primer sumando es divisible por 3 por definición, ya que es tres veces algo. El segundo es

divisible por 3 según la hipótesis de inducción. Así que $P(k+1) : 3|(k+1)(k+2)(k+3)$ será cierta si la hipótesis de inducción es cierta, por tanto según el principio de inducción: $3|n(n+1)(n+2)\ \forall n \geq 1$, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 39:

Demostrar por inducción que $3|(4^n - 1)\ \forall n \geq 1$

SOLUCIÓN.

Paso base:
Para $n = 1$ vemos que: $4^n - 1 = 4^1 - 1 = 3$ y claramente $3|3$.
Hipótesis de inducción:
Para un entero k arbitrario pero fijo tendríamos:

$$P(k) : 3|(4^k - 1)$$

Paso inductivo:
Veamos qué pasa para $k+1$:

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4^k + 4^k + 4^k + 4^k - 1$$

Ahora agrupamos para ver si podemos obtener la hipótesis de inducción en algún sitio y algo que con un poco de suerte sea divisible por 3:

$$4^k + 4^k + 4^k + 4^k - 1 = 3 \cdot 4^k + 4^k - 1 = \underbrace{3(4^k)}_{\alpha} + \underbrace{(4^k - 1)}_{\beta}$$

Esta expresión será divisible por tres si sus sumandos lo son. Como α es divisible por tres al ser tres veces algo y β es justo la hipótesis de inducción entonces $P(k+1) : 3|4^{k+1} - 1$ será cierta si la hipótesis de inducción es cierta y, por tanto, según el principio de inducción podemos afirmar que $3|(4^n - 1)\ \forall n \geq 1$, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 40:

Demostrar por inducción que 3 es divisor de $n^3 + 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

El caso base es trivial: para $n = 1$, tenemos que $n^3 + 2n = 3$ es obviamente divisible por 3. Supongamos ahora que, para un cierto natural k, arbitrario *pero fijo*, se cumple la hipótesis de inducción: $3 \mid k^3 + 2k$; es decir, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $k^3 + 2k = 3p$. Veamos ahora qué podemos decir del siguiente natural $k+1$:

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \\ &= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Luego si $k^3 + 2k$ es divisible por 3, entonces $(k+1)^3 + 3(k+1)^2$ también lo es ya que el segundo término de la suma de (1) lo es (es tres veces algo). Por tanto, el principio de inducción nos garantiza que esto es cierto para todo natural k.

PROBLEMA 41:

Demostrar por inducción que para todo natural $n \geq 2$ se satisface que $5^n \ \geq \ 3^n + 4^n$.

SOLUCIÓN.

El caso base es sencillo: si $n = 2$, $5^2 = 25 \geq 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

Supongamos ahora que para un cierto k, arbitrario pero fijo, se cumple la hipótesis de inducción: $5^k \geq 3^k + 4^k$ y queremos averiguar qué ocurre con el siguiente entero $k+1$:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} &= 5 \cdot 5^k \\ &\geq 5(3^k + 4^k) \qquad \text{(si usamos la hipótesis de inducción)} \\ &> 3^{k+1} + 4^{k+1} \qquad \text{(ya que } 5 > 3 \text{ y } 5 > 4) \,. \end{aligned}$$

Luego también se cumple para $k+1$ si la hipótesis de inducción se cumple y por tanto el principio de inducción nos garantiza que se cumple para todo entero $k \geq 2$.

PROBLEMA 42:

Probar por inducción que si $h > -1$ entonces $1 + nh \leq (1+h)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

El paso base corresponde a $n = 1$: tenemos que $1 + h \leq 1 + h$ que se cumple para todo h, en particular, para $h > -1$.
La hipótesis de inducción corresponde a suponer que $1 + kh \leq (1+h)^k$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Queremos ahora saber qué ocurre con el siguiente entero $k+1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} 1 + (k+1)h &= 1 + kh + h \\ &\leq (1+h)^k + h \qquad \text{(por la hipótesis de inducción)} \\ &= (1+h)^{k+1} - (1+h)^{k+1} + (1+h)^k + h \quad \text{(sumando y restando } (1+h)^{k+1}) \\ &= (1+h)^{k+1} + h\left[1 - (1+h)^k\right] \,. \end{aligned}$$

Pero de la hipótesis de inducción se sigue que $1 - (1+h)^k \leq -kh$ y, por tanto, si $h \geq 0$, deducimos que

$$1 + (k+1)h \;\leq\; (1+h)^{k+1} - kh^2 \;<\; (1+h)^{k+1} \,,$$

ya que $-kh^2 < 0$. Si $h < 0$ este argumento no es válido, pero se puede usar el siguiente razonamiento: si $h \in (-1, 0)$, entonces $1 - (1+h)^k > 0$ y como $h < 0$, $h\left[1 - (1+h)^k\right] < 0$ y, por tanto, $1 + (k+1)h \leq (1+h)^{k+1}$ también para este caso. Luego se verifica el paso de inducción y el principio de inducción nos garantiza que esta desigualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA 43:

Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia

- $a_n = 2\,a_{n-1} + n$ para $n \geq 1$, con $a_0 = 1$.
- $a_{n+1} - a_n \;=\; 3^n$ para $n \geq 0$, con $a_0 = 1$.

SOLUCIÓN.

- Es una ecuación de recurrencia no homogénea, lineal de orden uno. La solución general es la suma de una solución general de la homogénea y una solución particular de la no homogénea.

  La solución general de la ecuación homogénea asociada $a_n^h = 2a_{n-1}^h$ es

  $$a_n^h \;=\; A2^n \,,$$

  donde A es una constante a determinar.

La solución particular de la no homogénea es del tipo $Bn+C$ y las constantes B y C se determinan al imponer que sea efectivamente solución de la ecuación de recurrencia:

$$Bn + C \;=\; 2B(n-1) + 2C + n \;\Rightarrow\; n(B+1) + (C-2B) \;=\; 0\,.$$

Como debe ser cierto para todo n, cada coeficiente $B+1$ y $C-2B$ se debe anular: $B=-1$ y $C=2B=-2$. Luego la solución particular es $a_n^p = -(n+2)$ y la solución general de la ecuación es:

$$a_n \;=\; -(n+2) + A2^n\,.$$

La constante A se determina usando la condición inicial $a_0 = 1 \;= -2 + A \;\Rightarrow\; A \;=\; 3$. Luego la solución buscada es:

$$a_n \;=\; -(n+2) + 3\cdot 2^n\,.$$

- Es una ecuación de recurrencia lineal de orden uno, con coeficientes constantes y no homogénea. La solución general de la ecuación homogénea asociada es $a_n^h = K$, con K constante. Por otro lado, para encontrar una solución particular ensayamos con

  $$a_n^p \;=\; C\,3^n\,.$$

  Es decir

  $$C\,3^{n+1} - C\,3^n \;=\; 3^n \;\Rightarrow\; C \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

  Por tanto, la solución general de nuestra ecuación es

  $$a_n \;=\; a_n^h + a_n^p \;=\; K + \frac{3^n}{2}\,.$$

  Ahora bien, imponiendo $a_0 = 1$, la solución de la ecuación del enunciado es

  $$a_n \;=\; \frac{1+3^n}{2}\,.$$

PROBLEMA 44:

Resolver la siguiente relación de recurrencia no homogénea:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 4^n \qquad \text{con } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 10$$

Solución.

La ecuación característica de la homogénea es

$$x^2 = 4x - 4$$

que tiene a 2 como raíz doble (multiplicidad 2).
Como siempre, la solución general será la suma de la solución a la homogénea y una solución particular:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

La solución la homogénea es de la forma

$$a_n^{(h)} = (k_1 + nk_2)2^n.$$

La solución particular será de la forma

$$a_n^{(p)} = p_0 4^n.$$

Sustituyendo esta solución particular en la recurrencia original tenemos:

$$p_0 \cdot 4^n = p_0 \cdot 4 \cdot 4^{n-1} - p_0 \cdot 4 \cdot 4^{n-2} + 4^n.$$

Operamos para obtener un buen factor común, que en este caso es 4^n, quedando:

$$p_0 \cdot 4^n = p_0 \cdot 4^n - \frac{p_0}{4} \cdot 4^n + 4^n$$

que simplificando queda

$$p_0 \cdot \cancel{4^n} = p_0 \cdot \cancel{4^n} - \frac{p_0}{4} \cdot \cancel{4^n} + \cancelto{1}{4^n}$$

que despejando nos queda $p_0 = 4$. Así que una solución particular puede ser:

$$a_n^{(p)} = 4^{n+1}.$$

La solución general será de la forma:

$$a_n = (k_1 + nk_2)2^n + 4^{n+1}.$$

Imponemos ahora la las condiciones iniciales.

- Caso $n = 0$:

  Tenemos que $a_0 = 1$, que en la general nos da $1 = (k_1 + 02^0 + 4)$. Es decir que $k_1 = -3$

- Caso $n = 1$:

  Tenemos que $a_1 = 10$, que nos da $10 = (-3 + k_2)2 + 4^2$. Es decir que $k_2 = 0$.

Así que finalmente tendremos como solución general es:

$$a_n = -3 \cdot 2^n + 4^{n+1}.$$

<u>PROBLEMA 45:</u>

Resolver las siguientes recurrencias:

$$\begin{array}{l} a)\ a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}, \ \ a_0 = 1 \\ b)\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \ \ a_0 = 1, \ a_1 = 6 \end{array}$$

Solución: a) $a_n = 1/2(3^n + 1)$, b) $a_n = 5 \cdot 2^n - 4$

<u>PROBLEMA 46:</u>

Resolver la siguiente recurrencia:

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^{n-2}, \ \ a_0 = 1, \ a_1 = 2$$

Solución: $a_n = 2^n$

<u>PROBLEMA 47:</u>

Resolver la siguiente recurrencia:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3^n, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 3$$

SOLUCIÓN.

La homogénea es:

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$$

cuya ecuación característica es: $r^2 - 6r + 9 = 0$, que tiene una raíz doble $r = 3$.
Por tanto, la solución de la homogénea es de la forma:

$$a_n^{(h)} = (k_1 + nk_2)3^n$$

Nos falta una solución particular:

La función que nos convierte la recurrencia en no homegénea es del tipo $s^n[p_0]$ (potencia por polinomio de grado cero), siendo $s = 3$ que es raíz de la ecuación homegénea. Como además 3 es raíz de multiplicidad 2 una solución particular será de la forma:

$$a_n^{(p)} = p_0 n^2 3^n$$

Si ensayamos esta solución particular en la ecuación original obtenemos que

$$p_0 n^2 3^n - 6p_0(n-1)^2 3^{n-1} + 9p_0(n-2)^2 3^{n-2} - 3^n = 0.$$

Podemos ahora multiplicar por 3^2 todos los términos

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 6 \cdot 3^2 p_0(n-1)^2 3^{n-1} + 9 \cdot 3^2 p_0(n-2)^2 3^{n-2} - 3^2 3^n = 0$$

y aumentar exponentes en las potencias, en donde sea necesario, gracias a esos 3^2

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 6 \cdot 3p_0(n-1)^2 3^n + 9 \cdot p_0(n-2)^2 3^n - 3^2 3^n = 0$$

Operamos un poco

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 2 \cdot 3 \cdot 3p_0(n-1)^2 3^n + 3^2 \cdot p_0(n-2)^2 3^n - 3^2 3^n = 0$$

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 2 \cdot 3^2 p_0(n-1)^2 3^n + 3^2 \cdot p_0(n-2)^2 3^n - 3^2 3^n = 0$$

Ahora podemos dividir todos los sumandos por $3^2 3^n$. De esta forma eliminamos las potencias y podemos despejar p_0. El método suele ser habitual en este punto y los pasos dados con anterioridad estaban encaminados a conseguir esto mismo. Por tanto, ahora nos queda:

$$p_0 n^2 - 2p_0(n-1)^2 + p_0(n-2)^2 - 1 = 0$$

Ya sólo falta operar un poco

$$p_0 n^2 - 2p_0 n^2 + 4p_0 n - 2p_0 + p_0 n^2 - 4p_0 n + 4p_0 - 1 = 0$$

agrupando

$$(p_0 n^2 - 2p_0 n^2 + p_0 n^2) + (4p_0 n - 4p_0 n) + (-2p_0 + 4p_0 - 1) = 0$$

nos queda $0 + 0 + 2p_0 - 1 = 0$ y nos sale que para que se cumpla dicha solución particular tiene que ocurrir $p_0 = 1/2$. Obsérvese que para polinomios de grados mayores que cero lo que tenemos que obtener es un polinomio del grado correspondiente.
En este caso la solución particular finalemente es:

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2} n^2 3^n$$

Así que la solución de la recurrencia general es:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (k_1 + nk_2)3^n + \frac{1}{2} n^2 3^n.$$

Ya sólo nos queda ensayar esta solución con las condiciones iniciales para así averiguar los valores de k_1 y k_2.

La primera condición ($a_0 = 0$) nos dice que

$$0 = (k_1 + 0 \cdot k_2)3^0 + \frac{1}{2} 0^2 3^0$$

y por tanto que $k_1 = 0$.

La segunda ($a_1 = 3$) nos dice que $3 = 3(0 + k_2) + \frac{1}{2}3$ y por tanto que $k_2 = 1/2$.

Normalmente estas constantes no salen una tras otra tan directamente, sino que son solución de un sistema de dos ecuaciones (una de cada condición inicial) con dos incógnitas.

En este caso la solución general es $a_n = \frac{n}{2}3^n + \frac{1}{2}n^2 3^n = \frac{1}{2}3^n(n + n^2)$.

O lo que es lo mismo:

$$a_n = \frac{1}{2} 3^n (n^2 + n)$$

PROBLEMA 48:

Un distribuidor de ordenadores portátiles efectúa un pedido comprendido entre 1000 y 1500 equipos a una fábrica. Le envían dichos equipos en contenedores completos con capacidad de 68 ordenadores cada uno. El distribuidor los reparte entre sus clientes en furgonetas con capacidad de 20 ordenadores, quedando 32 sin repartir en el almacén. ¿Cuántos equipos pidió el distribuidor a la fábrica?

SOLUCIÓN.

Sea N el número de equipos que nos piden calcular. Sabemos que

$$N \; = \; 68k \, , \quad k \in \mathbb{Z} \, ,$$

para algún entero (positivo) k. Además sabemos que

$$N \pmod{20} \; \equiv \; 32 \Rightarrow N \; = \; 32 - 20p \, , \quad p \in \mathbb{Z} \, .$$

Nótese que se ha elegido el signo menos en '$-20p$' por conveniencia. De ambas ecuaciones se deduce la ecuación diofántica

$$68k + 20p \; = \; 32 \, .$$

Calculamos el máximo común divisor de 468 y 20 usando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 68 &= 20 \cdot 3 + 8 \, , \\ 20 &= 8 \cdot 2 + 4 \, , \\ 8 &= 4 \cdot 2 + 0 \, . \end{aligned}$$

Luego $\mathrm{mcd}(68,20) = 4$. Como $\mathrm{mcd}(68,20) = 4|32 = 8 \cdot 4$, la ecuación anterior admite infinitas soluciones. Usando el algoritmo de Euclides encontramos la siguiente relación (identidad de Bezout):

$$4 = -2 \cdot 68 + 7 \cdot 20\,.$$

Si multiplicando por 8 la ecuación anterior, resulta evidente que los números $k_0 = -16$ y $p_0 = 56$ nos proporcionan una solución particular de la ecuación diofántica $68k + 20p = 32$. La solución general es

$$\begin{aligned} k_q &= -16 + 5q\,, \\ p_q &= 56 - 17q\,, \end{aligned}$$

donde $q \in \mathbb{Z}$. La expresión de N en función de q es inmediata:

$$N = -1088 + 340q\,.$$

Como $N > 1000$, entonces deducimos que

$$q > \frac{2088}{340} \Rightarrow q_{\min} = 7\,.$$

El número mínimo de equipos es por tanto

$$N_{\min} = 1292\,.$$

PROBLEMA 49:

Un profesor reparte equitativamente los libros de su biblioteca entre sus 17 alumnos y sobra un libro. Uno de sus alumnos se queja del número de libros recibido y decide excluirse del reparto. Al volver a repartir sus libros equitativamente entre los alumnos restantes, sigue sobrando un libro. ¿Cuál es el mínimo número de libros que reparte el profesor?

SOLUCIÓN.

El enunciado nos dice que debemos resolver el siguiente sistema de congruencias lineales:

$$\begin{aligned} N &\equiv 1 \pmod{17}\,, \\ N &\equiv 1 \pmod{16}\,, \end{aligned}$$

donde N es el número de libros a repartir. Como 17 y 16 son primos relativos, el teorema chino del resto nos garantiza la existencia de una única solución módulo $m = 17 \cdot 16 = 272$. Dicha solución es trivialmente

$$N \equiv 1 \pmod{272}\,,$$

y por tanto

$$N = 1 + 272k\,, \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

El número mínimo de libros corresponderá a tomar $k = 1$:

$$N_{\min} = 273\,\text{libros}\,.$$

Nótese que para $k = 0$ tendríamos un sólo libro y del enunciado se deduce que hay al menos dos libros.

PROBLEMA 50:

Calcula las soluciones enteras de la ecuación

$$28x + 36y = 44\,.$$

Solución.

La ecuación es equivalente a

$$7x + 9y \;=\; 11\,.$$

Dicha ecuación admite soluciones enteras ya que $\mathrm{mcd}(7,9) = 1 \mid 11$. En concreto, mediante la identidad de Bezout, es trivial encontrar una solución particular. Puesto que

$$1 \;=\; 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 \;\Rightarrow\; 11 \;=\; 44 \cdot 7 - 33 \cdot 9\,,$$

se tiene que $x_0 = 44$ e $y_0 = -33$ son una solución del sistema. El resto de soluciones son de la forma

$$x_k \;=\; 44 + 9k\,, \quad y_k \;=\; -33 - 7k\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

PROBLEMA 51:

Usa el algoritmo de Euclides para calcular:

$\mathrm{mcd}(1476, 2808)$,
$\mathrm{mcd}(23345, 23545)$,
$\mathrm{mcd}(35234, 2178)$,
$\mathrm{mcd}(36735, 8347)$,
$\mathrm{mcd}(52, 13, 65, 26)$

Solución.

$\mathrm{mcd}(1476, 2808) = 36$,
$\mathrm{mcd}(23345, 23545) = 5$,
$\mathrm{mcd}(35234, 2178) = 2$,
$\mathrm{mcd}(36735, 8347) = 1$,
$\mathrm{mcd}(52, 13, 65, 26) = 13$

PROBLEMA 52:

- Convierte los siguiente enteros en base binaria a base decimal

$$a)\ 1010101010 \quad b)\ 10101111010 \quad c)\ 1001111010 \quad d)\ 101111010$$

- Convierte los siguientes enteros en notación hexadecimal a notación binaria:

$$a)\ ACDC \quad b)\ BECA \quad c)\ BACA \quad d)\ FABE$$

Solución.

$$a)\ 682 \quad b)\ 1402 \quad c)\ 634 \quad d)\ 378$$

$$a)\ 2AA \quad b)\ 57A \quad c)\ 27A \quad d)\ 17A$$

$$a)\ 1010110011011100 \quad b)\ 1011111011001010 \quad c)\ 1011101011001010 \quad d)\ 1111101010111110$$

PROBLEMA 53:

Utilizar aritmética modular para calcular los restos de dividir 3^8 por 13 y 2^{14} por 19.

SOLUCIÓN.

Primer caso:

sabemos, por ejemplo, que $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ y además que $3^8 = (3^3)^2 \cdot 3^2$. Por tanto

$$3^8 \equiv 1 \cdot 3^2 \pmod{13} \equiv 9 \pmod{13}.$$

Así que el resto es 9.

Segundo caso:

En este caso podemos usar, por ejemplo, la siguiente propiedad: $2^4 = 16 \equiv -3 \pmod{19}$. Aunque podríamos usar cualquier otra que nos permita cierta simplificación.

Como $14 = 4 \times +2$ podemos rescribir $2^{14} = (2^4)^3 \times 2^2 \equiv (-3)^3 \times 2^2 \pmod{19}$, que es igual a $-27 \times 4 = -108 \equiv -13 \pmod{19} \equiv 6 \pmod{19}$.

Así que el resto pedido es 6.

PROBLEMA 54:

Usa el algoritmo de Euclides para calcular:

$mcd(111, 201)$, $mcd(12345, 54321)$, $mcd(1529, 14039)$, $mcd(9888, 6060)$

Soluciones: 3, 3, 139, 12

PROBLEMA 55:

Calcular $mcd(36, 24, 54, 27)$
Pista: Calcular el mcd de los dos primeros, luego el mcd de lo obtenido y el tercero y así sucesivamente.

Solución: 3

PROBLEMA 56:

Simplifica las expresiones:

a) $4x \equiv 5 \pmod{9}$, b) $13x \equiv 14 \pmod{19}$

Soluciones: a) $x \equiv 8 \pmod{9}$, b) $x \equiv 4 \pmod{19}$

PROBLEMA 57:

Expresar 15 como combinación lineal de 321 y 433. Hacer lo mismo con 4 como combinación lineal de 92 y 84

Solución: $15 = 433 \times 3 - 321 \times 4$ y $4 = -10 \times 92 + 11 \times 84$

PROBLEMA 58:

Revolver la ecuación diofántica lineal: $37x - 107y = 25$

Solución: $x = -8 + 107k$ y $y = -3 + 37k$.

PROBLEMA 59:

Convierte los siguiente enteros en base binaria a base decimal

$$a)\ 11111 \quad b)\ 101010101 \quad c)\ 1000000001 \quad d)\ 110100100010000$$

Soluciones: 31, 341 ,513, 26896

PROBLEMA 60:

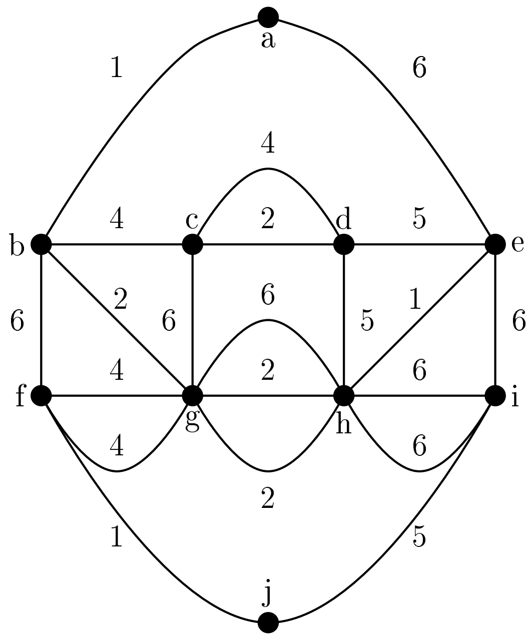
Convierte los siguientes enteros en notación hexadecinal a notación binaria:

$$a)\ 80E \quad b)\ 135AB \quad c)\ ABBA \quad d)\ ABCDEF$$

Soluciones: 100000001110, 10011010110101011, 101010111011, 101010111100110111101111

PROBLEMA 61:

Considérese el grafo G siguiente:



(a) ¿Es G un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo?

(b) Hallar el número de regiones, vértices y aristas del grafo dual $G^\star$.

(c) ¿Es G Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible.

(d) Hallar un árbol A generador mínimo de G y el peso total de dicho árbol.

SOLUCIÓN.

a) No es un grafo simple, porque hay tres aristas entre los vértices h y g. Es plano, ya que su representación gráfica no tiene aristas que se crucen. No es bipartito porque tiene ciclos de longitud tres (por ejemplo, (f, g, b, f). No es completo porque no todos sus vértices están conectados entre sí (por ejemplo, los vértices a y f no son adyacentes). No es regular porque no todos los vértices tiene el mismo grado (por ejemplo, el grado de a es 2 y el de d, 4). Es conexo, porque dado cualquier par de vértices, existe un camino elemental que los une.

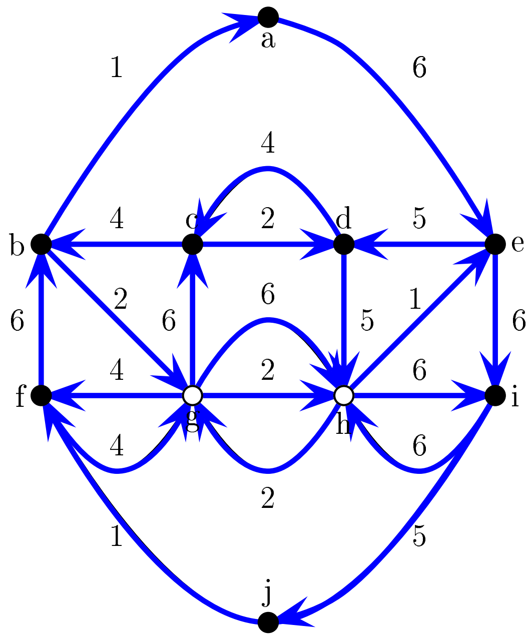
b) Al ser G plano, podemos definir su dual $G^\star$. El número de vértices, aristas y regiones del grafo original puede ser contado directamente de la figura

$$|V| = 10\,, \quad |E| = 21\,, \quad R = 13\,.$$

Estas cantidades satisfacen la ecuación de Euler: $|V| - |E| + R = 10 - 21 + 13 = 2$. Las correspondientes cantidades para el grafo dual son

$$|V^\star| = R = 13\,, \quad |E^\star| = |E| = 21\,, \quad R^\star = |V| = 10\,.$$

c) No es euleriano porque hay vértices de grado impar (g y h). Sin embargo, es semi-euleriano ya que sólo hay dos vértices con grado impar por lo que admite un camino euleriano que, por ejemplo, comienza en g y acaba en h. Este camino se puede obtener mediante la modificación del algoritmo de Fleury: $g \to c \xrightarrow{2} d \xrightarrow{4} c \to b \to g \xrightarrow{4\uparrow} f \to b \to a \to e \to d \to h \to e \to i \xrightarrow{6\uparrow} h \xrightarrow{6\downarrow} i \to j \to f \xrightarrow{4\downarrow} g \xrightarrow{2\downarrow} h \xrightarrow{2\uparrow} g \xrightarrow{6} h$, donde $h \xrightarrow{p} i$ significa la arista de peso p que une h con i. Cuando hay dos aristas entre los mismos vértices y con el mismo peso p, escribimos $h \xrightarrow{p\uparrow} i$ para denotar la que está encima y $h \xrightarrow{p\downarrow} i$ la que está debajo.



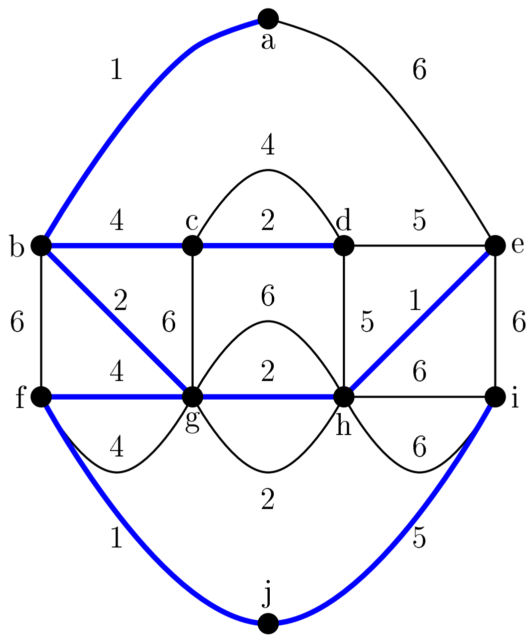
d) Un árbol de peso mínimo lo obtenemos por ejemplo usando el algoritmo de Kruskal. El resultado $A = (V, F)$ lo podemos escribir dando el conjunto F de las aristas del árbol

$$F = \{\{a,b\},\{e,h\},\{f,j\},\{b,g\},\{c,d\}_2,\{g,h\}_2,\{b,c\},\{f,g\}_4,\{i,j\}\}\,,$$

donde, por ejemplo, $\{g,h\}_2$ significa que tomamos una de las aristas de peso $\omega = 2$ (si hubiese varias) entre los vértices g y h. Hay $|F| = 9$ aristas, como es de esperar ($|F| = |V| - 1$). El peso total de este árbol es

$$\omega \;=\; \sum_{i\in F} \omega_i \;=\; 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5 \;=\; 22\,.$$

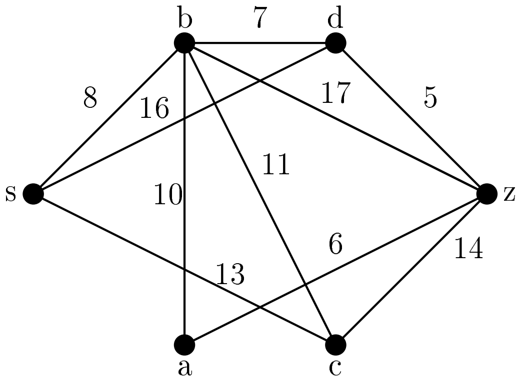
Nótese que en este caso no hay un único árbol recubridor de peso mínimo. ∎



PROBLEMA 62:

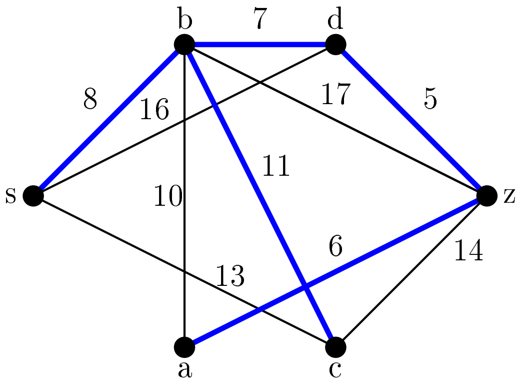
Considérese el grafo ponderado de la figura y contéstese a las siguientes preguntas:

1. Calcular el árbol recubridor de peso mínimo sobre dicho grafo y dar su peso.
2. Decir si el grafo es euleriano o semi-euleriano y por qué. En caso de que alguna de las respuestas sea afirmativa, encontrar el correspondiente recorrido euleriano o semi-euleriano.
3. Decir si es regular, bipartito y completo y por qué.



SOLUCIÓN.

1) El árbol generador de peso mínimo está formado por las aristas {s,b}, {b,d}, {d,z}, {z,a}, y {b,c} y pesa 37 unidades.



2) Puesto que hay más de dos vértices con grado impar el grafo no es ni euleriano ni semi-euleriano.

3) El grafo no es regular ya que hay vértices con grados distintos. No es completo porque hay vértices que no son adyacentes. Tampoco es bipartito ya que contiene ciclos de longitud tres, por ejemplo, (s,d,b,s). ∎

PROBLEMA 63:

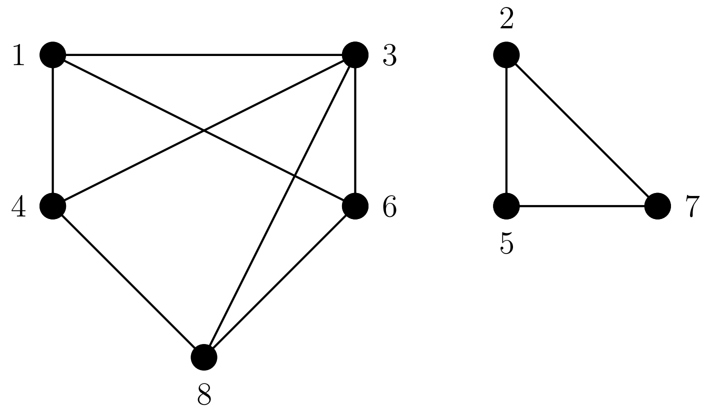
Sea el grafo $G = (V, E)$ definido por la siguiente matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Es bipartito? ¿Es planar?
2. Encontrar, si es posible, un árbol generador.
3. ¿Es G semi-euleriano? ¿Cuál es el número mínimo de aristas que necesitamos añadir a G para que sea euleriano?

SOLUCIÓN.

1) Si nombramos los vértices $1, 2, 3, \ldots, 8$ según el orden en la matriz de adyacencia, una representación gráfica de G es



G no es bipartito porque contiene ciclos de longitud impar: por ejemplo, $(2, 7, 5, 2)$. Es planar porque se puede representar en el plano sin que se crucen las aristas: la arista $\{3, 4\}$ se puede llevar por fuera del vértice 1, mientras que la arista $\{3, 8\}$ se puede llevar entre las dos componentes conexas de G.

2) No existe un árbol generador de G porque G no es conexo: tiene dos componentes conexas $G = G_1 \cup G_2$ con $V_1 = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ y $V_2 = \{2, 5, 7\}$.

3) G no es semi-euleriano porque no es conexo (para que un grafo sea euleriano no basta con que todos sus vértices tengan grado par). Los vértices de grado impar son $\{1, 4, 6, 8\}$ y todos ellos pertenecen a la componente conexa G_1.
Para conseguir un grafo euleriano a partir de G necesitamos en primer lugar unir las dos componentes conexas de G. Para ello debemos añadir una arista que conecte uno de los vértices de $V_2 = \{2, 5, 7\}$ (por ejemplo, el 2) con un vértice de $V_1 = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ con grado impar (por ejemplo, el 1). El nuevo grafo obtenido de esta forma es conexo y tiene cuatro vértices de grado impar: $\{2, 4, 6, 8\}$. En segundo lugar es necesario añadir dos aristas más en las que uno de sus extremos sea un vértice de grado impar y sin repetir ninguno (por ejemplo, las aristas $\{2, 8\}$ y $\{4, 6\}$). Ahora todos los vértices tienen grado par y el grafo es euleriano. En definitiva, el número mínimo de aristas adicionales que es necesario añadir es tres. ∎

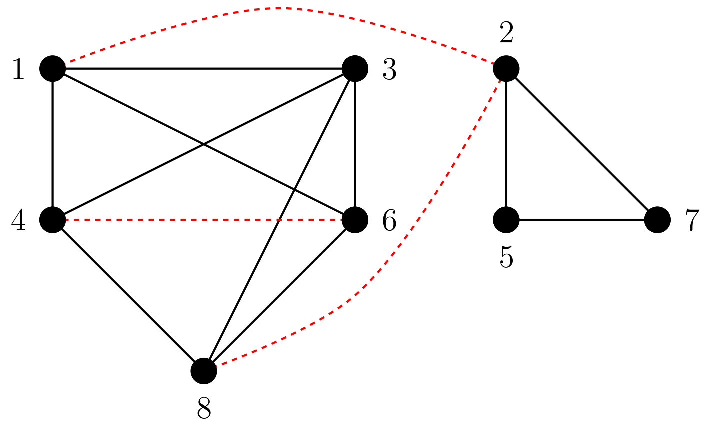
PROBLEMA 64:

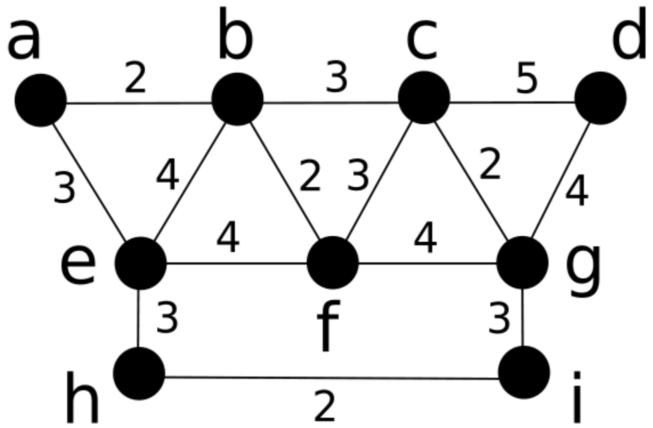
Sea el grafo de la figura de más adelante.

(a) ¿Es dicho un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo? Justifica las respuestas.

(b) ¿Es Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible (como los vértices están etiquetados dar la secuencia de los mismos que definen el camino o circuito si existe).

(c) Hallar un árbol generador de peso mínimo y el peso total de dicho árbol sobre el grafo.





Solución.

a) Es un grafo simple, pues solamenten una arista una dos vértices. Es plano, pues se puede representar sin que las aristas se crucen. No es bipartido, pues hay ciclos de longitud 3. No es completo, pues no todos los vértices están unidos con todos. No es regular, ya que no todos los vértices tienen el mismo grado. Es concexo ya que sólo tiene una componente conexa.

b) Sí es euleriano, ya que el grado de todos los vertices es par. Un posible camino obtenible por Fleury sería:

$$\{a, b, e, f, b, c, f, g, c, d, g, i, h, e, a\}$$

c) Un árbol recubridor de peso mínimo obtenible por Kruskal sería:

$$\{(ih), (he), (ea), (ab), (bf), (fc), (cg), (gd)\}$$

El peso de este árbol, o de cualquier otro árbol recubridor de peso mínimo sobre el grafo, es 21.

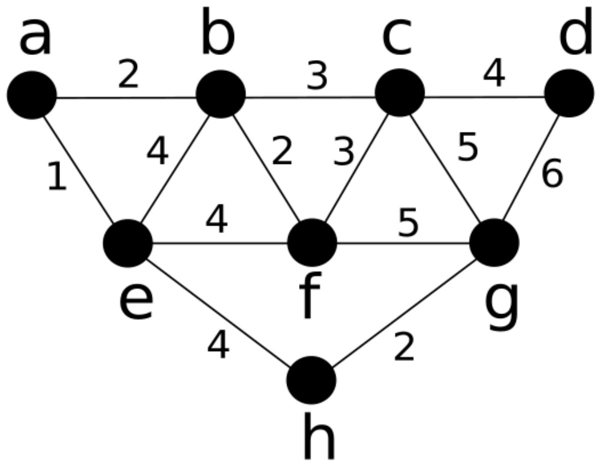
PROBLEMA 65:

Sea el grafo de la figura de más adelante.

(a) ¿Es dicho un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo? Justifica las respuestas.

(b) ¿Es Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible (como los vértices están etiquetados dar la secuencia de los mismos que definen el camino o circuito si existe).

(c) Hallar un árbol generador de peso mínimo de y el peso total de dicho árbol sobre el grafo.



SOLUCIÓN.

a) Es un grafo simple, pues solamenten una arista una dos vértices. Es plano, pues se puede representar sin que las aristas se crucen. No es bipartido, pues hay ciclos de longitud 3. No es completo, pues no todos los vértices están unidos con todos. No es regular, ya que no todos los vértices tienen el mismo grado. Es concexo ya que sólo tiene una componente conexa.

b) Sí es Euleriano, ya que el grado de todos sus vértices es par. Un posible camino que se puede obtener por Fleury sería:

$$\{a, b, e, f, b, c, f, c, g, d, c, g, h, e, a\}$$

c) Usando Kruskal es posible obtener un árbol recubridor de peso mínimo como este:

$$\{(gh), (he), (ea), (ab), (bf), (fc), (cd)\}$$

El peso de este árbol, o de cualquier otro árbol recubridor de peso mínimo sobre el grafo, es 18.

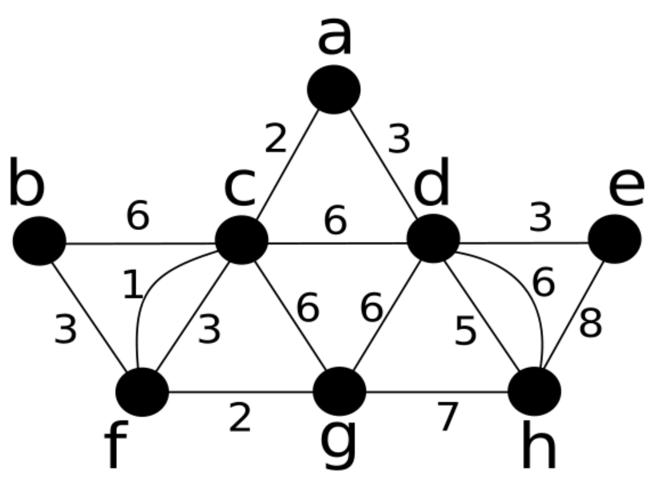
PROBLEMA 66:

Sea el grafo de la figura de más adelante.

(a) ¿Es dicho un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo? Justifica las respuestas.

(b) ¿Es Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible (como los vértices están etiquetados dar la secuencia de los mismos que definen el camino o circuito si existe).

(c) Hallar un árbol generador de peso mínimo y el peso total de dicho árbol sobre el grafo.



Solución.

a) No es un grafo simple, es un multigrafo, pues a veces dos vértices son unidos por más de una arista. Es plano, pues se puede representar sin que las aristas se crucen. No es bipartido, pues hay ciclos de longitud 3. No es completo, pues no todos los vértices están unidos con todos. No es regular, ya que no todos los vértices tienen el mismo grado. Es concexo ya que sólo tiene una componente conexa.

b) Sí es Euleriano ya que el grado de todos sus vértices es par. Un posible camino que se puede obtener por Fleury sería:

$$\{a, c, b, f, (1)c, (3)f, g, c, d, g, h, (5)d, (6)h, e, d, a\}$$

d)Usando Kruskal se puede obtener un árbol recubridor como el siguiente:

$$\{(bf), (f1c), (fg), (ca), (ad), (d5h), (de)\}$$

El peso de este árbol, o de cualquier otro árbol recubridor de peso mínimo sobre el grafo, es 19.

PROBLEMA 67:

Sea la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, A, A, B, S\}$, $T = \{a, b\}$, S es el símbolo inicial y $P = \{S ::= ABa, A ::= BB, B ::= ab, AB ::= b\}$. ¿Se deriva la cadena $BBBa$ de ABa?, ¿cómo?, ¿y ba?

Solución.

Efectivamente la cadena $BBBa$ se deriva directamente de ABa en dicha gramática, puesto que $A ::= BB$ es una producción de dicha gramática. La cadena ba se deriva de ABa, puesto que $ABa \Rightarrow ba$ usando la producción $AB ::= b$.

PROBLEMA 68:

Sea la gramática con vocabulario $V = \{S,\ A,\ a,\ b\}$, conjunto terminales $T = \{a,\ b\}$, símbolo inicial S y las producciones $P = \{S ::= aaA,\ S ::= Ab,\ A ::= aaa\}$. ¿Cuál es el lenguaje $L(G)$ generado por esta gramática?

Solución. A partir del estado inicial S, se puede derivar aaA utilizando la producción $S ::= aaA$. De aaA, mediante la producción $A ::= aaa$ se deriva $aaaaa$. También se puede usar la producción $S ::= Ab$ para derivar Ab y a partir de aquí obtener $aaab$.Puesto que no puede derivarse ninguna otra palabra utilizando las producciones, se tiene que $L(G) = \{aaab,\ aaaaa\}$

PROBLEMA 69:

Determina si la palabra bab pertenece o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

SOLUCIÓN. Hay dos maneras de solucionar este problema. La primera utilizando una estrategia de análisis descendente y otra con un análisis ascendente. Utilizando la primera podemos partir del símbolo inicial y utilizar las producciones hasta llegar a bab. De este modo $S \Rightarrow AB$ y usar la producción $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB$. Luego usando $B ::= b$ llegamos a $CaB \Rightarrow Cab$ finalmente usando $C ::= b$ llgeamos a $Cab \Rightarrow bab$. Por tanto bab sí pertenece al lenguaje.

PROBLEMA 70:

A) Sea la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial. Las producciones son $S ::= 0S1$ y $S ::= \lambda$. La gramática que genera será $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, ...\}$ en donde hemos empleado la notación de tal modo que C es el conjunto de cadenas del tipo 000..,111... en donde hay n ceros seguidos de n unos.

Construye una derivación (secuencia) que partiendo del elemento inicial llegue hasta $0^3 1^3$ (tres ceros seguidos de tres unos) utilizando la gramática anterior.
B) Sean la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, 2, S, A, B\}$, $T = \{0, 1, 2\}$ y S es el símbolo inicial. Las producciones son $S ::= 0SAB$, $S ::= \lambda$, $BA ::= AB$, $0A ::= 01$, $1A ::= 11$, $1B ::= 12$ y $2B ::= 22$. Se puede demostrar que el conjunto generado es $C = \{0^n 1^n 2^n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$
Construye una derivación (secuencia) que partiendo el elemento inicial llegue a $0^2 1^2 2^2$ utilizando la gramática anterior. Pista: la secuencia pedida puede empezar así

$$S0SAB \Rightarrow 00SABAB \Rightarrow 00ABAB \Rightarrow 00AABB \ldots$$

SOLUCIÓN.

A) $S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000111$

B) $S \Rightarrow 0SAB \Rightarrow 00SABAB \Rightarrow 00ABAB \Rightarrow 00AABB \Rightarrow 001ABB \Rightarrow 0011BB \Rightarrow 00112B \Rightarrow 001122$

PROBLEMA 71:

Contruye una derivación de $0^2 1^4$ con estas dos gramáticas distintas.
La primera $G_a = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial. Las producciones son $S ::= 0S$, $S ::= S1$ y $S ::= \lambda$.
La segunda $G_b = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{S, A, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial. Las producciones son $S ::= 0S$, $S ::= 1A$, $S ::= 1$, $A ::= 1A$, $A ::= 1$ y $S ::= \lambda$.

SOLUCIÓN. Para la primera gramática podemos construir esta derivación:

$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 00S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 00S111 \Rightarrow 00S111 \Rightarrow 00S1111 \Rightarrow 001111$

Para la segunda gramática podemos construir esta derivación:
$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 001A \Rightarrow 0011A \Rightarrow 00111A \Rightarrow 001111$

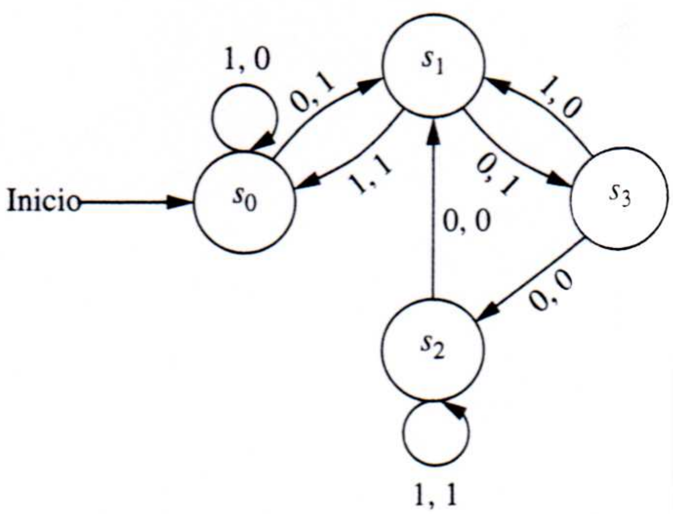
PROBLEMA 72:

Las tablas de transición y de salida de una máquina secuencial o máquina de estado finito son las siguientes:

f	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	s_1	s_0
s_1	s_3	s_0
s_2	s_1	s_2
s_3	s_2	s_1

g	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	1	0
s_1	1	1
s_2	0	1
s_3	0	0

De las que se puede deducir el siguiente diagrama de estados:



Hallar la cadena de salida generada por la máquina de estado finito del ejercicio anterior si la cadena de entrada es 11011011.

SOLUCIÓN.

00110110
Los sucesivos estados con sus salidas son:

Entrada	1	1	0	1	1	0	1	1	–
Estado	s_0	s_0	s_0	s_1	s_0	s_0	s_1	s_0	s_0
Salida	0	0	1	1	0	1	1	0	–

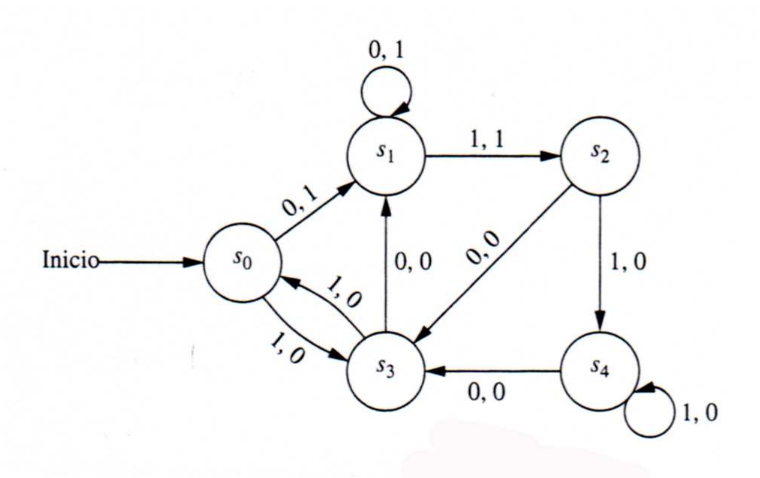
PROBLEMA 73:

Las tablas de transición y de salida de una máquina de estado finito son las siguientes:

f	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	s_1	s_3
s_1	s_1	s_2
s_2	s_3	s_4
s_3	s_1	s_0
s_4	s_3	s_4

g	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	1	0
s_1	1	1
s_2	0	0
s_3	0	0
s_4	0	0

De las que se puede deducir el siguiente diagrama de estados:



Hallar la cadena de salida generada por la máquina de estado finito del ejercicio anterior si la cadena de entrada es 11011011

<u>SOLUCIÓN.</u>

Los sucesivos estados con sus salidas son:

Entrada	1	1	0	1	1	0	1	1	−
Estado	s_0	s_3	s_0	s_1	s_2	s_4	s_3	s_0	s_3
Salida	0	0	1	1	0	0	0	0	−

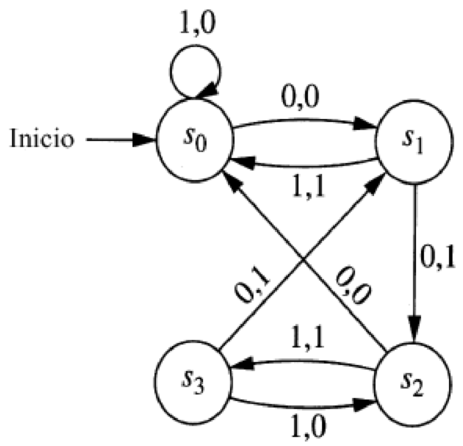
<u>PROBLEMA 74:</u>

Hállese el diagrama de estados para una máquina de estado finito cuyas tablas de transición y de salida son las siguientes:

f	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	s_1	s_0
s_1	s_2	s_0
s_2	s_0	s_3
s_3	s_1	s_2

g	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	0	0
s_1	1	1
s_2	0	1
s_3	1	0

<u>SOLUCIÓN.</u>



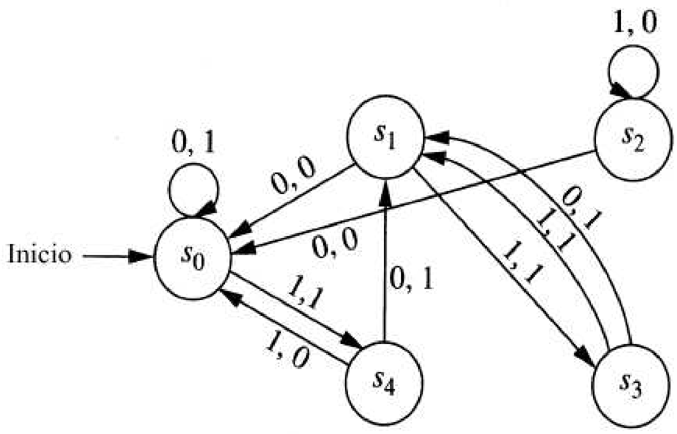
PROBLEMA 75:

Hállese el diagrama de estados para una máquina de estado finito cuyas tablas de transición y de salida son las siguientes:

f	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	s_0	s_4
s_1	s_0	s_3
s_2	s_0	s_2
s_3	s_1	s_1
s_4	s_1	s_0

g	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	1	1
s_1	0	1
s_2	0	0
s_3	1	1
s_4	1	0

SOLUCIÓN.



PROBLEMA 76:

Sea la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, A, A, B, S\}$, $T = \{a, b\}$, S es el símbolo inicial y $P = \{S ::= ABa, A ::= BB, B ::= ab, AB ::= b\}$. ¿Se deriva la cadena $Aaba$ de ABa?, ¿cómo?, ¿y la cadena $abababa$?

SOLUCIÓN.

Efectivamente la cadena $Aaba$ se deriva directamente de ABa en dicha gramática, puesto que $B ::= ab$ es una producción de dicha gramática. La cadena $abababa$ se deriva de ABa, puesto que $ABa \Rightarrow Aaba \Rightarrow BBaba \Rightarrow Bababa \Rightarrow bababa$ usando las producciones $B ::= ab$, $A ::= BB$, $B ::= ab$ y $B ::= ab$ sucesivamente.

PROBLEMA 77:

Sea la gramática con vocabulario $V = \{S,\ A,\ a,\ b\}$, conjunto terminales $T = \{a,\ b\}$, símbolo inicial S y las producciones $P = \{S ::= aA,\ S ::= b,\ A ::= aa\}$. ¿Cuál es el lenguaje $L(G)$ generado por esta gramática?

SOLUCIÓN.

A partir del estado inicial S, se puede derivar aA utilizando la producción $S ::= aA$. También se puede usar la producción $S ::= b$ para derivar b. De aA, mediante la producción $A ::= aa$ se deriva aaa. Puesto que no puede derivarse ninguna otra palabra utilizando las producciones, se tiene que $L(G) = \{b,\ aaa\}$

PROBLEMA 78:

Determina si la palabra $cbab$ pertenece o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

Solución.

Hay dos maneras de solucionar este problema. La primera utilizando una estrategia de análisis descendente y otra con un análisis ascendente. Utilizando la primera podemos partir del símbolo inicial y utilizar las producciones hasta llegar a $cbab$. De este modo $S \Rightarrow AB$ y usar la producción $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB$. Puesto que $cbab$ comienza por cb utilizamos la producción $C ::= cb$. Esto da lugar a $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB \Rightarrow cbab$. También se podría haber partido de $cbab$ y usar producciones en hasta llegar a S (análisis ascendente).

PROBLEMA 79:

Determina si las palabras de la lista de abajo pertenecen o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

$$a)\ baba \quad b)\ abab \quad c)\ cbaba \quad d)\ bbbcba$$

Solución.

Sí, No, Sí, No.

PROBLEMA 80:

¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S1$ y $S ::= \lambda$.

Notación: Podemos denotar un conjunto $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, ...\}$ como el conjunto de cadenas del tipo 000..,111... en donde hay n ceros seguidos de n unos.

Solución.

Será precisamente $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, ...\}$

PROBLEMA 81:

¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S$, $S ::= S1$ y $S ::= \lambda$.

Solución.

El conjunto pedido es $\{0^m 1^n |\ m$ y n enteros no negativos$\}$

PROBLEMA 82:

¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, A, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S$, $S ::= 1$ $S ::= 1$, $A ::= 1A$, $A ::= 1$, y $S ::= \lambda$.

Solución.

El conjunto pedido es $\{0^m 1^n | \ m$ y n enteros no negativos$\}$

PROBLEMA 83:

decir si la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{S, A, B, a, b\}$, $T = \{a, b\}$ es una gramática de tipo 0, pero no de tipo 1; de tipo 1, pero no de tipo 2, o una gramática de tipo 2 pero no de tipo 3, etc, si P, el conjunto de producciones, es:

$a)\ S ::= aAB,\ A ::= Bb,\ B ::= \lambda$
$b)\ S ::= aA,\ A ::= a,\ A ::= b$
$c)\ S ::= ABa,\ AB ::= a$
$d)\ S ::= ABA,\ A ::= aB,\ B ::= ab$
$e)\ S ::= bA,\ A ::= B,\ B ::= a$

Solución.

a) de tipo 2 pero no de tipo 3.
b) de tipo 3.
c) de tipo 0, pero no de tipo 1.
d) de tipo 2, pero no de tipo 3.
e) de tipo 2.

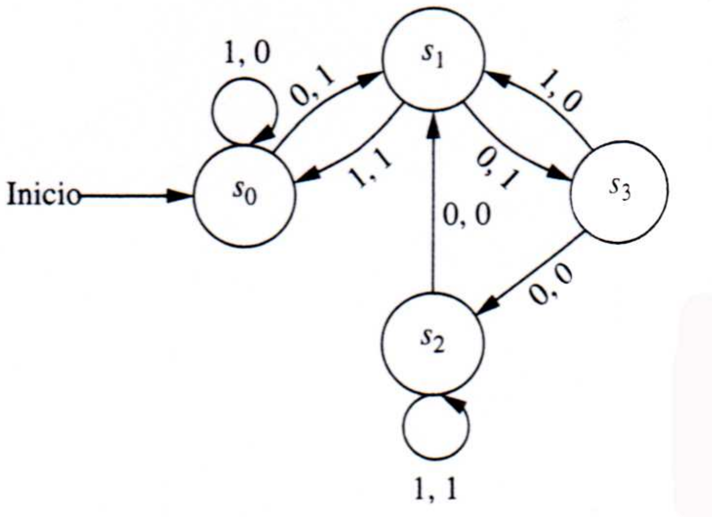
PROBLEMA 84:

Las tablas de transición y de salida de una máquina de estado finito son las siguientes:

f	$Entrada$	
$Estado$	0	1
s_0	s_1	s_0
s_1	s_3	s_0
s_2	s_1	s_2
s_3	s_2	s_1

g	$Entrada$	
$Estado$	0	1
s_0	1	0
s_1	1	1
s_2	0	1
s_3	0	0

De las que se puede deducir el siguiente diagrama de estados:

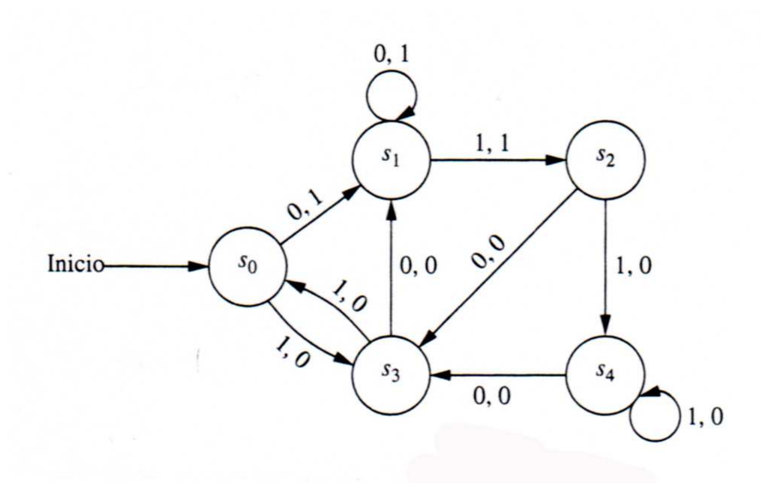


Hállese el diagrama de estados para una máquina de estado finito cuyas tablas son:

f	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	s_1	s_3
s_1	s_1	s_2
s_2	s_3	s_4
s_3	s_1	s_0
s_4	s_3	s_4

g	*Entrada*	
Estado	0	1
s_0	1	0
s_1	1	1
s_2	0	0
s_3	0	0
s_4	0	0

<u>Solución.</u>



PROBLEMA 85:

Hallar la cadena de salida generada por la máquina de estado finito del ejercicio anterior si la cadena de entrada es 101011

<u>Solución.</u>

001000
Los sucesivos estados con sus salidas son:

Entrada	1	0	1	0	1	1	–
Estado	s_0	s_3	s_1	s_2	s_3	s_0	s_3
Salida	0	0	1	0	0	0	–