



Universidad de Alcalá

Escuela Politécnica Superior

Control I

Apuntes

Alcalá de Henares - 23 de abril de 2014

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Lugar geométrico de las raíces | 3 |
| 1.1. Problema 1 | 3 |
| 1.2. Problema 2 | 10 |
| 1.3. Problema 3 | 16 |
| 2. Diagrama Bode | 21 |
| 2.1. Representación asintótica | 22 |
| 2.1.1. Factores básicos de $\mathbf{G}(j\omega)$ | 23 |
| 2.2. Trazado de diagramas de Bode | 28 |
| 2.3. Trazado rápido | 30 |
| 3. Compensación o diseño de PID | 34 |
| 3.1. Problema 1 | 34 |
| 3.2. Problema 2 | 37 |
| 3.3. Problema 3 | 41 |
| 3.4. Problema 4 | 45 |
| 3.5. Problema 5 | 47 |
| 3.6. Problema 6 | 48 |
| 3.7. Problema 7 | 52 |
| 3.8. Problema 8 | 55 |
| 3.9. Problema 9 | 57 |
| 3.10. Problema 10 | 59 |
| 3.11. Problema 11 | 61 |
| 3.12. Problema 12 | 64 |

Capítulo 1

Lugar geométrico de las raíces

1.1. Problema 1

El circuito de la figura 1.1 corresponde a un sistema de control con realimentación unitaria.

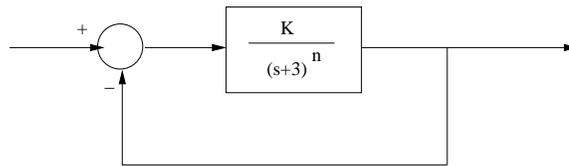


Figura 1.1: Control con realimentación unitaria

Se pide:

- Calcular y dibujar el lugar de las raíces del sistema para $K > 0$, suponiendo que $n=2$
- Estudiar el comportamiento dinámico del sistema
- Hallar el valor de K que correspondería a un coeficiente de amortiguamiento de valor 0,5
- Suponiendo que el valor del exponente n pasa a valer 3, dibujar el nuevo lugar de las raíces y explicar como evoluciona respecto al anterior
- Explicar el comportamiento dinámico

SOLUCIÓN

a) Lugar de las raíces con $n=2$

El lugar de las raíces es el lugar geométrico que describirían los polos de la función de transferencia $C(s)/R(s)$ cuando varía un parámetro, generalmente una ganancia K .

Se parte de la función en lazo abierto del sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+3)^2} \quad (1.1)$$

y para dibujar el lugar de las raíces se siguen los pasos siguientes:

- **Ramas**

Nº de polos: $n_p=2$ $p_1 = -3$ $p_2 = -3$

Nº de ceros: $n_z=0$

Nº de ramas: $n_r=\text{máx}[n^\circ \text{ de polos}, n^\circ \text{ de ceros}]=\text{máx}[2,0]=2$

Nº de asíntotas (ramas que terminan en el infinito): $n_a = n_p - n_z=2$

Las ramas comienzan en los polos y, en este caso, terminan en el infinito. Otras veces terminarían en los ceros.

- **Lugar de las raíces en el eje real**

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, solo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el eje real no es del lugar de las raíces.

- **Asíntotas**

Nº de asíntotas: $n_a = n_p - n_z = 2$

Centroide: $\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n_a} = -3$

Ángulo de las asíntotas: $\gamma_m = \frac{180}{n_a}(2k + 1)$ con $K= 0, 1, \dots$

En nuestro caso $\gamma_m = \pm 90^\circ$

- **Puntos de dispersión sobre el eje real**

De la ecuación $1 + G(s)H(s) = 0$ se despeja K y los puntos de dispersión se calculan de: $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K}{(s+3)^2} = 0 \\ K &= -(s+3)^2 \\ \frac{dK}{ds} &= -2(s+3) = 0 \\ s &= -3 = \sigma_D \end{aligned} \tag{1.2}$$

- **Puntos de corte con el eje imaginario**

Se calculan de la ecuación característica $1+G(s)H(s) = 0$

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K}{(s+3)^2} = 0 \\ (s+3)^2 + K &= 0 \\ s^2 + 6s + 9 + K &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

En el eje imaginario $s = j\omega$ y la ecuación anterior se transforma en:

$$-\omega^2 + 6j\omega + 9 + K = 0 + j0$$

Igualando las partes imaginarias y reales a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 + 6j\omega + 9 + K &= 0 \\
6\omega &= 0 \\
9 + K &= \omega^2
\end{aligned} \tag{1.4}$$

de donde se deduce $\omega = 0$ y $K = -9$ lo cual es imposible porque $K > 0$. No hay cortes con el eje imaginario.

También se podría haber aplicado el criterio de estabilidad de **Routh-Hurwitz**. Para comprobar que las raíces de un polinomio con todos sus términos positivos, como:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \tag{1.5}$$

estén en el semiplano izquierdo, se colocan en la primera fila los términos pares a_0, a_2, a_4, \dots y en la segunda fila los impares a_1, a_3, a_5, \dots como se indica en la figura 1.2

$$\begin{array}{l|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & \dots & & \\
\vdots & \dots & & & &
\end{array}$$

Figura 1.2: Criterio de Routh

Los coeficientes b_i se calculan según:

$$b_i = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_{2i} \\ a_1 & a_{2i+1} \end{vmatrix}}{a_1} \tag{1.6}$$

y análogamente los coeficientes c_i y d_i :

$$c_i = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_{2i+1} \\ b_1 & a_{i+1} \end{vmatrix}}{b_1} \quad d_i = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_{i+1} \\ c_1 & c_{i+1} \end{vmatrix}}{c_1} \tag{1.7}$$

El cálculo de los coeficientes b_i continúa hasta que todos sean cero y el proceso continúa hasta llegar a la fila s^1 . El conjunto completo adquiere forma triangular.

El criterio de estabilidad establece que el número de raíces con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna.

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces queden en el semiplano izquierdo es que todos los coeficientes de la ecuación 1.5 sean positivos y que todos los términos de la primera columna del conjunto de Routh sean también positivos.

En nuestro caso la tabla que resulta es la de la figura 1.3.

| | | |
|-------|-------|-------|
| s^2 | 1 | $9+K$ |
| s^1 | 6 | |
| s^0 | $9+K$ | |

Figura 1.3: Tabla de Routh

en la que se aprecia que todos los elementos de la primera columna son positivos independientemente de K , al ser $K > 0$. Valga lo que valga K las raíces están siempre en el lado izquierdo y no cortan al eje imaginario porque si nó pasarían al semiplano derecho. El sistema siempre será estable, valga lo que valga K .

■ **Ángulos de arranque desde los polos o de entrada a los ceros**

Para hallar el ángulo con el que se sale desde un polo complejo (o con el que se entra en un cero complejo) se restan (o suman) a 180° los ángulos formados por las líneas que salen de ese polo (o cero), a los demás polos y se suman (o restan) los ángulos de las que vayan a los ceros. A este criterio se le puede llamar angular.

En el caso de que todos los polos y ceros no sean complejos se puede aplicar el criterio de fase: $\varphi_{G(s)H(s)} = 180^\circ(2k + 1)$.

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} -2\theta &= 180^\circ(2k + 1) \\ \theta &= -90^\circ(2k + 1) \quad \theta_{D1} = -90^\circ \quad \theta_{D2} = 90^\circ \end{aligned} \quad (1.8)$$

El lugar de las raíces se representa en la figura 1.4.

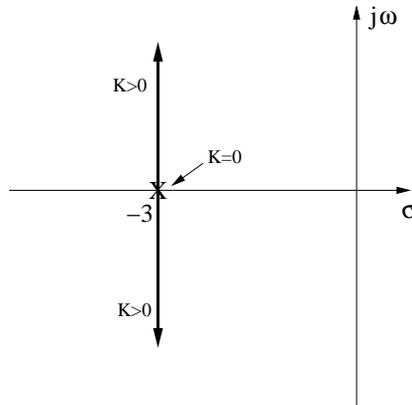


Figura 1.4: Lugar de las raíces

Con $K=0$ los polos coinciden con los de lazo abierto y según varía K se desplazan por el lugar de las raíces. Por mucho que aumente K los polos siempre están en el semiplano derecho y nunca se haría inestable. Si K aumenta mucho, si existirán oscilaciones de frecuencia elevada y sobreimpulsos que podrían dañar al sistema.

b) **Comportamiento dinámico**

La ecuación característica de un sistema de segundo orden es:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (1.9)$$

en donde ξ es el coeficiente de amortiguamiento, ω_n es la frecuencia natural del sistema que representa la frecuencia a la que oscilaría el sistema si no tuviera amortiguamiento, es decir con $\xi = 0$. Esta frecuencia no es observable. La frecuencia de oscilación que puede observarse en el transitorio es la frecuencia natural amortiguada ω_d que siempre es más pequeña que la frecuencia natural ω_n .

Cuando $\xi = 1$ el amortiguamiento es crítico, si $\xi < 1$ el sistema es subamortiguado y con $\xi > 1$ es sobreamortiguado.

Tanto el valor de ξ como el de ω_n dependen de donde están situados los polos. Esta relación para un par de polos complejos conjugados situados en $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$ se muestra en la figura 1.5

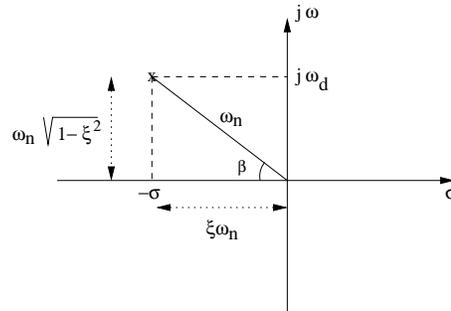


Figura 1.5: Relación de ξ , ω_n , y ω_d con la posición de los polos

Nótese que $\cos\beta = \xi$.

La función de transferencia de nuestro sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K}{(s+3)^2+K} = \frac{K}{s^2+6s+9+K} \quad (1.10)$$

y comparando las ecuaciones características, resulta:

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= 6 \\ \omega_n^2 &= 9 + K \end{aligned} \quad (1.11)$$

El amortiguamiento crítico ocurre con $\xi = 1$ por lo que $\omega_n = 3$ y $K=0$. Para valores de $\xi < 1$ el sistema es subamortiguado que corresponde a valores de $\omega_n > 3$ y $K > 0$. Los valores de $K < 0$ no se consideran en este problema.

c) **Valor de K para que $\xi = 0,5$**

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= \omega_n = 6 \\ \omega_n^2 &= 36 = 9 + K \quad K = 27 \end{aligned} \quad (1.12)$$

podría haberse calculado la frecuencia natural amortiguada ω_d y la posición de los polos.

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 3\sqrt{3} \\ \sigma &= \xi\omega_n = 3 \end{aligned} \quad (1.13)$$

los polos estarían situados en $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -3 \pm j3\sqrt{3}$ que, por supuesto, pertenece al lugar de las raíces.

El ángulo β valdría $\tan\beta = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \quad \beta = 60^\circ$

d) Lugar de las raíces para $n=3$

Se parte de la función en lazo abierto del sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+3)^3} \quad (1.14)$$

y para dibujar el lugar de las raíces se siguen los pasos siguientes:

- **Ramas**

Nº de polos: $n_p=3 \quad p_1 = -3 \quad p_2 = -3 \quad p_3 = -3$

Nº de ceros: $n_z=0$

Nº de ramas: $n_r = \max[\text{nº de polos}, \text{nº de ceros}] = \max[3,0] = 3$

Nº de asíntotas (ramas que terminan en el infinito): $n_a = n_p - n_z = 3$

Las ramas comienzan en los polos y, en este caso, terminan en el infinito. Otras veces terminarán en los ceros.

- **Lugar de las raíces en el eje real**

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, solo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el tramo $[-\infty, -3]$ es del lugar de las raíces.

- **Asíntotas**

Nº de asíntotas: $n_a = n_p - n_z = 3$

Centroide: $\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n_a} = -3$

Ángulo de las asíntotas: $\gamma_m = \frac{180}{n_a}(2k+1)$ con $k=0, 1, \dots$

En nuestro caso $\gamma_{m1} = 60^\circ \quad \gamma_{m2} = 180^\circ \quad \gamma_{m3} = -60^\circ$

- **Puntos de dispersión sobre el eje real**

De la ecuación $1 + G(s)H(s) = 0$ se despeja K y los puntos de dispersión se calculan de: $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K}{(s+3)^3} = 0 \\ K &= -(s+3)^3 \\ \frac{dK}{ds} &= -3(s+3)^2 = 0 \\ s &= -3 \text{ (doble)} = \sigma_D \end{aligned} \quad (1.15)$$

- **Puntos de corte con el eje imaginario**

Se calculan de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$

$$\begin{aligned}
1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K}{(s+3)^3} = 0 \\
(s+3)^3 + K &= 0 \\
s^3 + 9s^2 + 27s + 27 + K &= 0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

En el eje imaginario $s = j\omega$ y la ecuación anterior se transforma en:

$$-j\omega^3 - 9\omega^2 + j27\omega + 27 + K = 0 + j0$$

Igualando las partes imaginarias y reales a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned}
-\omega^3 + 27\omega &= 0 \\
9\omega^2 - 27 - K &= 0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

cuyas soluciones son $\omega = 0$ y $K = -27$ que no es válida al tener que ser $K > 0$ y $\omega = \sqrt{27}$ y $K = 216$. Los puntos de corte con el eje imaginario ocurren en $\pm j\sqrt{27} = \pm j5,19$

Aplicando el criterio de Routh, la tabla corresponde con la de la figura 1.6.

| | | |
|-------|-------------------|--------|
| s^3 | 1 | 27 |
| s^2 | 9 | $27+K$ |
| s^1 | $\frac{216-K}{9}$ | |
| s^0 | $27+K$ | |

Figura 1.6: Tabla de Routh

en la que se aprecia que todos los elementos de la primera columna serán positivos cuando $K < 216$. Si $K = 216$ las raíces están justamente en el eje imaginario y si $K > 216$ pasarían al semiplano derecho haciéndose inestable. El último término de la columna siempre es positivo al ser $K > 0$.

Los valores de ω que corresponden a este valor de K se deducen de:

$$\begin{aligned}
9\omega^2 - 27 - K &= 0 \\
9\omega^2 - 27 - 216 &= 0 \\
\omega^2 = \frac{243}{9} = 27 & \quad \omega = \sqrt{27}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

y los puntos de corte con el eje imaginario ocurren en $\pm j\sqrt{27} = \pm j5,19$.

- **Ángulos de arranque desde los polos o de entrada a los ceros** Aplicando el criterio de fase: $\varphi_{G(s)H(s)} = 180(2k+1)$.

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
-3\theta &= 180^\circ(2k+1) \\
\theta &= -60^\circ(2k+1) \\
\theta_{D1} &= -60^\circ \quad \theta_{D2} = 180^\circ \quad \theta_{D3} = 60^\circ
\end{aligned} \tag{1.19}$$

El lugar de las raíces se representa en la figura 1.7.

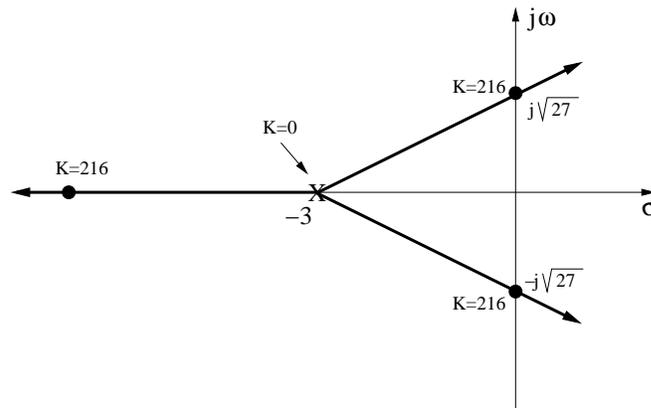


Figura 1.7: Lugar de las raíces

Al tener tres polos el sistema puede hacerse inestable porque la condición de fase de $\varphi_{G(s)H(s)} = 180^\circ$ puede ser alcanzada (se podrían alcanzar 270° en el infinito), cosa que es imposible en los sistemas con dos polos que, en el mejor de los casos, podrían alcanzar un desfase de 180° en el infinito y con ganancias infinitas.

■ Comportamiento dinámico

Ahora el sistema es de tercer orden. Teniendo en cuenta que con $K = 0$ los polos son reales pero están a punto de que dos de ellos se hagan complejos, el valor de $K = 0$ corresponde al amortiguamiento crítico.

Desde $0 < K < 216$ aparecen oscilaciones por lo que el sistema es subamortiguado. Para que un sistema sea sobreamortiguado sus polos han de ser reales y no existen oscilaciones.

Para $K = 216$ los polos son imaginarios puros y las oscilaciones se mantienen. El sistema es oscilante.

Cuando $K > 216$ el sistema es inestable y la respuesta al impulso sería creciente con el tiempo hasta destruirse porque alguna de sus variables alcanzaría valores superiores a los permitidos.

1.2. Problema 2

En el sistema de control de la figura 1.8, se pide:

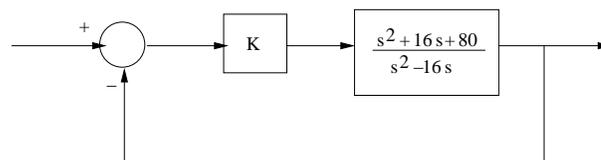


Figura 1.8: Control con realimentación unitaria y amplificador K

- Calcular el margen de estabilidad del sistema
- Dibujar el lugar de las raíces para valores de $K > 0$
- Estudiar el comportamiento dinámico del sistema en función de los valores de K

d) Obtener el valor de los polos dominantes que hacen que el sistema responda con un máximo sobreimpulso del 0,434% cuando se le introduce una señal escalón. (Se obtendrán de manera aproximada utilizando el procedimiento gráfico a partir del lugar de las raíces)

Nota: El valor del sobreimpulso máximo es $M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

SOLUCIÓN

a) Margen de estabilidad

La ecuación característica es:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s^2 + 16s + 80)}{s^2 - 16} = 0 \quad (1.20)$$

$$(1 + K)s^2 + 16Ks + 80K - 16 = 0$$

La tabla del criterio de Routh se encuentra en la figura 1.9:

| | | |
|-------|--------|--------|
| s^2 | 1+K | 80K-16 |
| s^1 | 16K | |
| s^0 | 80K-16 | |

Figura 1.9: Criterio de Routh

Para que los elementos de la primera columna sean positivos se necesita que:

$$\begin{aligned} 1 + K > 0 \quad K > -1 \\ 16K > 0 \quad K > 0 \\ 80K - 16 > 0 \quad K > 0,2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

El más restrictivo es $K > 0,2$. Con valores de K que cumplan esta condición el sistema siempre será estable.

b) Lugar de las raíces

Se parte de la función en lazo abierto del sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{Ks^2 + 16Ks + 80K}{s^2 - 16} \quad (1.22)$$

■ Ramas

Nº de polos: $n_p=2$ $p_1 = 4$ $p_2 = -4$

Nº de ceros: $n_z=2$ $z_1 = -8 + j4$ $z_2 = -8 - j4$

Nº de ramas: $n_r = \max[\text{nº de polos}, \text{nº de ceros}] = \max[2,2] = 2$

Nº de asíntotas (ramas que terminan en el infinito): $n_a = n_p - n_z = 0$

Las ramas comienzan en los polos y, en este caso, terminan en los ceros.

■ **Lugar de las raíces en el eje real**

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, sólo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el tramo $[-4, 4]$ es del lugar de las raíces.

■ **Asíntotas**

Nº de asíntotas: $n_a = n_p - n_z = 0$ No tiene

■ **Puntos de dispersión sobre el eje real**

De la ecuación $1 + G(s)H(s) = 0$ se despeja K y los puntos de dispersión se calculan de: $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K(s^2 + 16s + 80)}{s^2 - 16} = 0 \\
 K &= \frac{-(s^2 - 16)}{s^2 + 16s + 80} \\
 \frac{dK}{ds} &= \frac{-2s(s^2 + 16s + 80) + (s^2 - 16)(2s + 16)}{(s^2 + 16s + 80)^2} \quad (1.23) \\
 -16s^2 - 192s - 256 &= 0 \\
 s^2 + 12s + 16 &= 0 \\
 \sigma_{D1} &= -1,55 \quad \sigma_{D2} = -10,45
 \end{aligned}$$

El punto de dispersión σ_{D2} no es válido al no pertenecer al lugar de las raíces.

El valor de K correspondiente a $s = -1,55$ es:

$$K = \frac{-(s^2 - 16)}{s^2 + 16s + 80} = \frac{-((-1,55)^2 - 16)}{(-1,55)^2 + 16(-1,55) + 80} = 0,236 \quad (1.24)$$

■ **Puntos de corte con el eje imaginario**

Ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$

$$(1 + K)s^2 + 16Ks + 80K - 16 = 0 \quad (1.25)$$

Aplicando el criterio de Routh, la tabla corresponde con la de la figura 1.9.

en la que se aprecia que el límite de la estabilidad (eje $j\omega$) ocurre cuando:

$$\begin{aligned}
 1 + K &= 0 \\
 16K &= 0 \\
 80K - 16 &= 0
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

De la primer ecuación $K = -1$, que no es solución válida al ser $K > 0$. De la segunda ecuación $K = 0$ y como:

$$K = \frac{-(s^2 - 16)}{s^2 + 16s + 80} \quad (1.27)$$

resulta:

$$s^2 - 16 = 0 \quad (1.28)$$

y los puntos de corte serían: $s = \pm 4$ que son reales y no corresponden al eje $j\omega$.

De la última ecuación, $K = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$ resultando la ecuación:

$$6s^2 + 16s = 0 \quad (1.29)$$

cuyas soluciones son $s = \frac{-8}{3}$ real y por lo tanto no válida y $s = 0$ que es el único punto de corte con el eje imaginario.

■ **Ángulos de salida desde los polos o de entrada a los ceros**

Siguiendo el criterio angular, en la figura 1.10 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar correspondientes al primer polo.

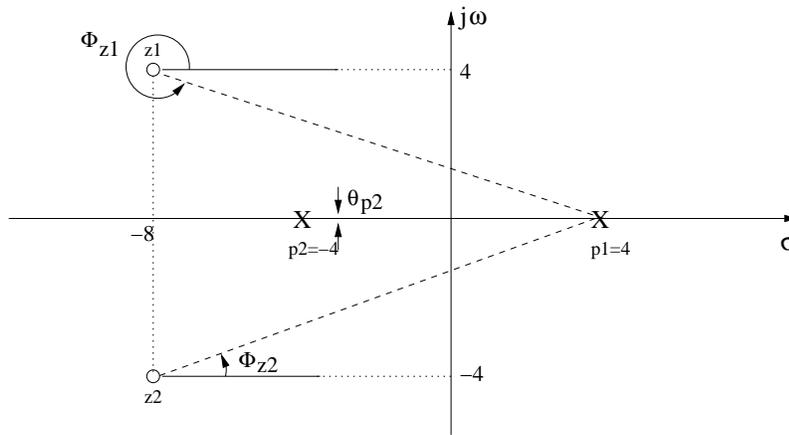
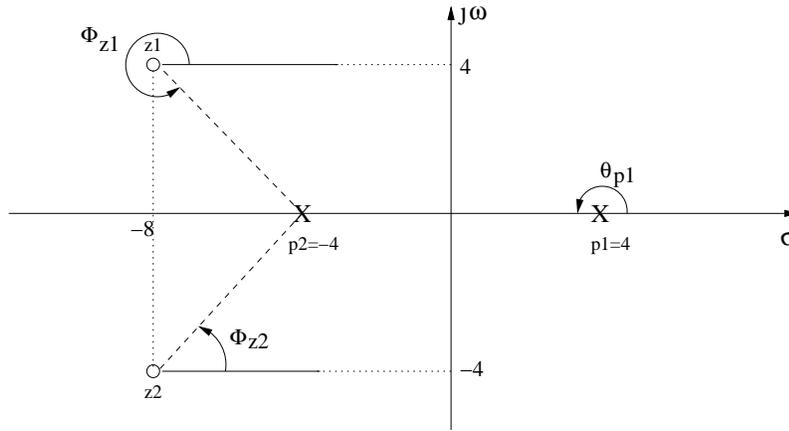


Figura 1.10: Ángulo de salida desde el polo p_1

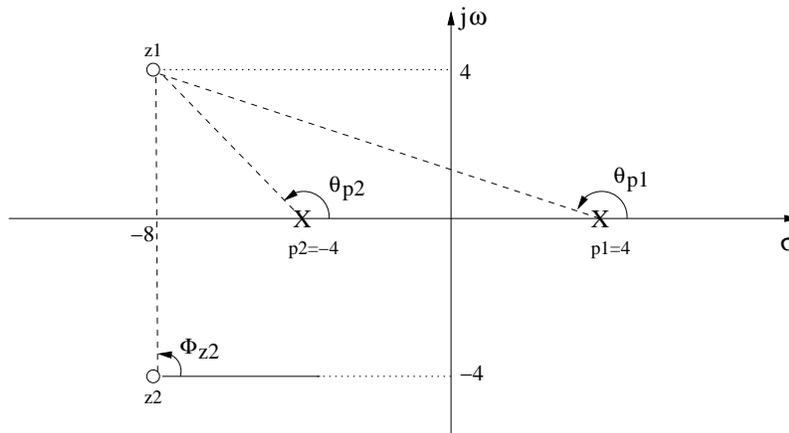
$$\begin{aligned} \theta_{p1} &= 180 - \theta_{p2} + \phi_{z1} + \phi_{z2} = 180 - 0 + \arctan\left(\frac{-4}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{12}\right) = \\ &= 180 + 360 - \arctan\left(\frac{4}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{12}\right) = 180 \end{aligned} \quad (1.30)$$

En la figura 1.11 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar correspondientes al segundo polo.

Figura 1.11: Ángulo de salida desde el polo p_2

$$\theta_{p2} = 180 - \theta_{p1} + \phi_{z1} + \phi_{z2} = 180 - 180 + 360 - \arctan\left(\frac{4}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \quad (1.31)$$

En la figura 1.12 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar correspondientes al primer cero.

Figura 1.12: Ángulo de entrada al cero z_1

$$\phi_{z1} = 180 + \theta_{p1} + \theta_{p2} - \phi_{z2} = 180 + 180 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{12}\right) + 180 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) - 90 = 26,57^\circ \quad (1.32)$$

El otro cero es simétrico a éste por lo que entrará con $\phi_{z2} = -26,57^\circ$

El lugar de las raíces se representa en la figura 1.13.

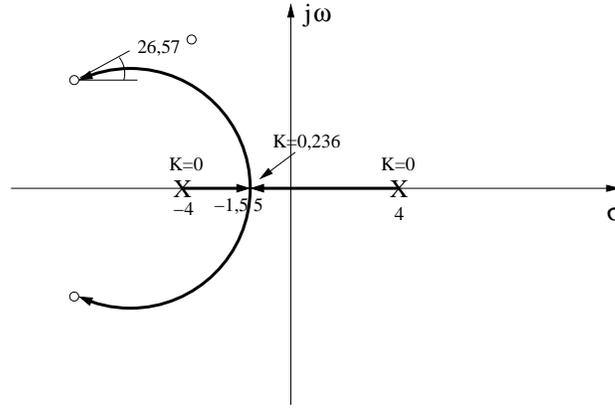


Figura 1.13: Lugar de las raíces

- Comportamiento dinámico**

Dependiendo de los valores de K el sistema se comporta de la siguiente manera:

$0 < K < 0,2$ Sistema inestable

$0,2 < K < 0,236$ Los polos son reales. Sobreamortiguado.

$K = 0,236$ Los polos están a punto de ser complejos. Amortiguamiento crítico.

$K > 0,236$ Polos complejos. Sistema subamortiguado.

- Situación de los polos para un sobreimpulso determinado**

El sobreimpulso queda determinado por el valor del amortiguamiento según la ecuación:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}.$$

Tomando neperianos:

$$\begin{aligned} \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} &= \ln M_p \\ \pi^2\xi^2 &= (1-\xi^2)(\ln M_p)^2 \\ \xi^2[\pi^2 + (\ln M_p)^2] &= (\ln M_p)^2 \\ \xi &= \frac{\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \\ \xi &= \frac{\ln 0,00434}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 0,00434)^2}} = 0,866 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Como $\cos\beta = \xi$ resulta $\beta = \cos^{-1}\xi = \cos^{-1}0,866 = 30^\circ$. Trazando este ángulo en la gráfica del lugar de las raíces se obtiene la figura 1.14

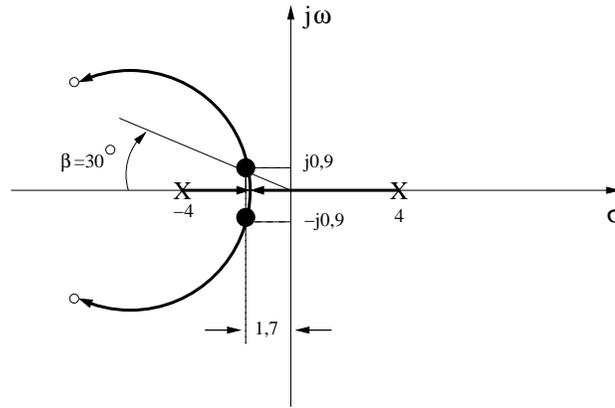


Figura 1.14: Ubicación de los polos para un sobreimpulso del 0,434 %

en donde se aprecia que el valor aproximado de la situación de los polos es $p_{1,2} = -1,7 \pm j0,9$

1.3. Problema 3

Un sistema de control en lazo cerrado tiene la siguiente ecuación característica en su forma polinómica:

$$s^2(s + 9) + K(s + 1) = 0$$

- Calcular la ganancia en lazo abierto $G(s)H(s)$ del sistema en función de K , suponiendo que dicho sistema tiene un cero en $s = -1$
 - Dibujar el lugar de las raíces para valores de K mayores de cero
 - Estudiar el comportamiento dinámico del sistema
 - A partir del lugar de las raíces, calcular el valor de los polos dominantes para que el tiempo de establecimiento valga 6,28 s
 - En las condiciones del apartado anterior calcular el valor del tercer polo y el valor de K
- Nota: El tiempo de establecimiento viene dado por $t_s = \frac{\pi}{\xi\omega_n}$

SOLUCIÓN

a) Ganancia en lazo abierto

La ecuación característica corresponde a

$$1 + G(s)H(s) = 0 = s^2(s + 9) + K(s + 1) = 1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$$

por lo que la ganancia en lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$$

b) Lugar de las raíces para $K > 0$

Se parte de la función en lazo abierto $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$

- **Ramas**

Nº de polos: $n_p=3$ $p_1 = 0$ $p_2 = 0$ $p_3 = -9$

Nº de ceros: $n_z=1$ $z_1 = -1$

Nº de ramas: $n_r=\text{máx}[\text{nº de polos, nº de ceros}]=\text{máx}[3,1]=3$

Nº de asíntotas (ramas que terminan en el infinito): $n_a = n_p - n_z = 2$

Las ramas comienzan en los polos y, en este caso, una termina en el cero y dos en el infinito.

- **Lugar de las raíces en el eje real**

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, sólo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el tramo $[-9, -1]$ es del lugar de las raíces.

- **Asíntotas**

Nº de asíntotas: $n_a = n_p - n_z = 2$

Centroide: $\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n_a} = \frac{-9 - (-1)}{2} = -4$

Ángulo de las asíntotas: $\gamma_m = \frac{180}{n_a}(2k + 1)$ con $K=0, 1, \dots$

En nuestro caso $\gamma_m = 90^\circ(2k + 1) = \pm 90^\circ$

- **Puntos de dispersión sobre el eje real**

De la ecuación $1 + G(s)H(s) = 0$ se despeja K y los puntos de dispersión se calculan de: $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)} = 0 \\
 K &= \frac{-s^2(s+9)}{s+1} \\
 \frac{dK}{ds} &= \frac{(-3s^2 - 18s)(s+1) + (s^3 + 9s^2)}{(s+1)^2} = 0 \\
 s^3 + 6s^2 + 9s &= 0 \\
 \sigma_{D1} &= 0 \quad \sigma_{D2} = -3 \quad (\text{doble})
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Los valores de K correspondientes a $s = 0$ y $s = -3$ son $K = 0$ y:

$$K = \frac{-s^2(s+9)}{s+1} = \frac{-(-3)^2(-3+9)}{-3+1} = 27 \tag{1.35}$$

También se pueden calcular más fácilmente mediante la condición de módulo $|G(s)H(s)| = 1$ ya que siempre que estemos en algún lugar de las raíces, el módulo de la ganancia en lazo abierto valdrá la unidad y la fase 180° .

Como los paréntesis tipo $(s + p_1)$ cuando se sustituye s por el punto de dispersión representan la distancia del punto de dispersión a los polos, o a las ceros, resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{K d_z}{dp_1 dp_2 dp_3} &= 1 \\
 K &= \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{d_z} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{2} = 27
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

- **Puntos de corte con el eje imaginario**

Aplicando el criterio de Routh, la tabla de la ecuación característica corresponde a la de la figura 1.15.

| | | |
|-------|----------------|---|
| s^3 | 1 | K |
| s^2 | 9 | K |
| s^1 | $\frac{8}{9K}$ | |
| s^0 | K | |

Figura 1.15: Criterio de Routh

El límite de la estabilidad (eje $j\omega$) ocurre cuando $K = 0$ y los puntos de corte ocurrirían en $s = 0$ y $s = -9$. Este último punto no es válido al ser real y no corresponder con el eje $j\omega$ y el punto de corte $s = 0$ es doble por lo que realmente será una tangencia.

- **Ángulos de salida desde los polos o de entrada a los ceros**

En la figura 1.16 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar, que son sencillos al estar los polos y ceros en el eje real.

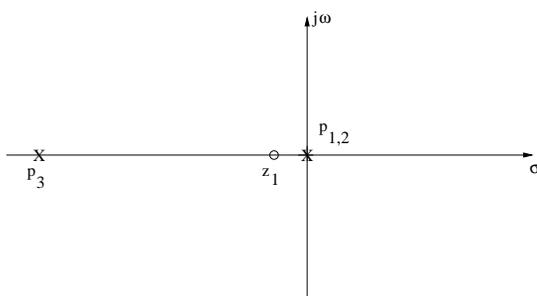


Figura 1.16: Polos y ceros de la ecuación característica

$$\begin{aligned}
 2\theta_{p_{1,2}} &= \pm 180 - \theta_{p_3} + \phi_{z_1} = \pm 180 - 0 + 0 = \pm 180 & \theta_{p_{1,2}} &= \pm 90^\circ \\
 \theta_{p_3} &= \pm 180 - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} + \phi_{z_1} = \pm 180 - 180 - 180 + 180 = 0^\circ & & (1.37) \\
 \phi_{z_1} &= \pm 180 + \theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} = \pm 180 + 180 + 180 + 0 = 180^\circ
 \end{aligned}$$

El lugar de las raíces se representa en la figura 1.17.

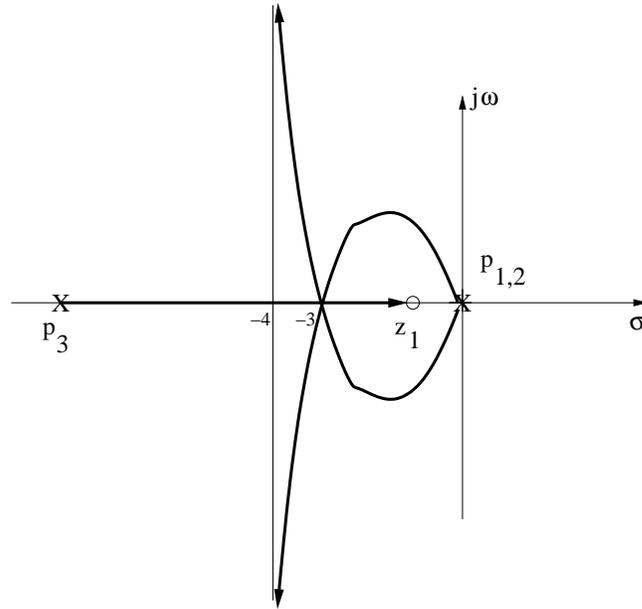


Figura 1.17: Lugar de las raíces

En el punto de dispersión, que corresponde a $K = 27$, los tres polos coinciden.

c) **Comportamiento dinámico**

$0 < K < 27$ En cuanto K se hace positiva, hay dos polos complejos conjugados por lo que existen oscilaciones y el sistema es subamortiguado.

$K = 27$ En ese punto los tres polos son reales y, dos de ellos, están en el límite de hacerse complejos. Amortiguamiento crítico.

$K > 27$ El sistema oscila amortiguadamente. Subamortiguado.

d) **Situación de los polos para un tiempo de establecimiento determinado**

El tiempo de establecimiento depende de la frecuencia natural ω_n y del coeficiente de amortiguamiento ξ según la ecuación:

$$t_s = \frac{\pi}{\xi\omega_n}$$

Como según el enunciado $t_s = 6,28$ segundos, entonces $\xi\omega_n = 0,5$. La parte real de los polos valdrá pues $-\sigma = \xi\omega_n = 0,5$.

La parte imaginaria se obtiene, aproximadamente, mirando en la gráfica del lugar de las raíces, resultando para los dos polos dominantes $p_{1,2} = -0,5 \pm j0,5$.

e) **Situación del tercer polo y valor de la ganancia**

Siempre que el número de polos menos el número de ceros sea igual o mayor que 2 $n_p - n_z \geq 2$, se puede aplicar la regla de Grant dada por:

$$\sum \text{polos de } G(s)H(s) = \sum \text{Raíces de } [1 + G(s)H(s)] \quad (1.38)$$

En nuestro caso $-9 = (-0,5 + j0,5) + (-0,5 - j0,5) + p_3$ de donde $p_3 = -8$.

El valor de K puede obtenerse de la condición de módulo $|G(s)H(s)| = 1$

$$K = \frac{-s^2(s+9)}{s+1} = \frac{-(-8)^2(-8+9)}{-8+1} = \frac{64}{7} = 9,14 \quad (1.39)$$

Capítulo 2

Respuesta en frecuencia. Diagramas de Bode

Es la respuesta en régimen permanente de un sistema ante una entrada sinusoidal. El estudio se hace variando la frecuencia de la señal de entrada en un rango de interés y observando la salida. No es necesario obtener las raíces de la ecuación característica.

Las pruebas son sencillas y muy precisas pudiéndose deducir la función de transferencia de sistemas complicados y extender el diseño a sistemas de control no lineales.

Es importante distinguir los diferentes dominios en los que se suele trabajar en teoría de control:

- **Dominio del tiempo:** Fácil de entender con los sentidos pero muy difícil el análisis matemático asociado (ecuaciones diferenciales que describen fenómenos físicos reales). En él todo es real y no serían necesarios los números complejos. Conceptos como velocidad de respuesta, constantes de tiempo, tiempos de subida, retardos, sobreimpulsos, amortiguamiento, etc. cobran todo su sentido. Por ejemplo, la tensión en bornas de un condensador sería:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt \quad (2.1)$$

- **Dominio de la frecuencia:** Es el dominio de la transformada de Fourier. Es un dominio imaginario cuya variable es la pulsación $j\omega$, donde $\omega = 2\pi f$. Las funciones de transferencia son fáciles de obtener porque se limitan a analizar el sistema bajo una excitación sinusoidal de forma análoga al análisis con fasores de circuitos en alterna. Por ejemplo, la tensión en bornas de un condensador sería:

$$V_c(j\omega) = \frac{I_c(j\omega)}{j\omega C} \quad (2.2)$$

que, por otra parte, es la transformada de Fourier de la ecuación 2.1.

En este dominio no puede hablarse estrictamente de polos y ceros, aunque se haga frecuentemente dada su similitud con el dominio de la transformada de Laplace.

- **Dominio transformado:** Es el dominio de la transformada de Laplace (o transformada Z en sistemas discretos). Es un dominio imaginario cuya variable compleja es $s = \sigma + j\omega$. El paso del dominio de la frecuencia al dominio transformado se realiza cambiando $j\omega$ por s .

Tanto en dominio transformado como en el de la frecuencia aparecen los conceptos de ancho de banda, funciones de transferencia, polos, ceros, etc.

En la figura 2.1 se representan algunos de los conceptos anteriormente descritos.

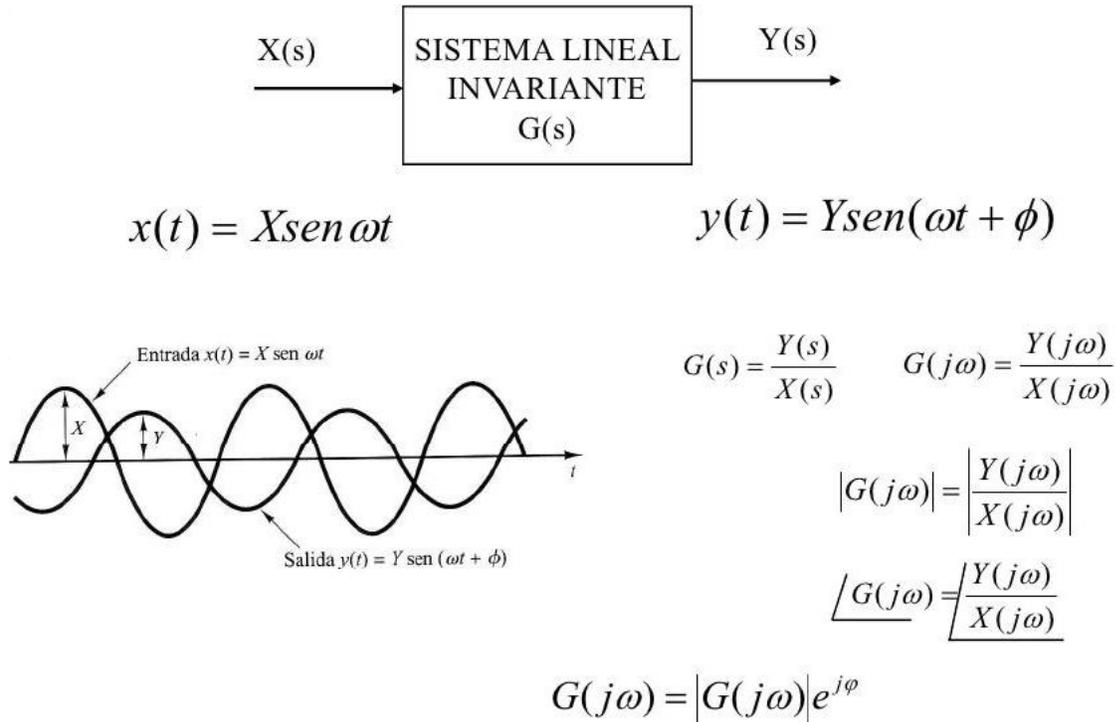


Figura 2.1: Representación de un sistema en el dominio transformado. Señales de entrada y salida en el dominio del tiempo. Funciones de transferencia en los dominios transformado y de la frecuencia. Módulo y fase de la función de transferencia en el dominio de la frecuencia

Tres son las herramientas que suelen emplearse en este dominio y las tres visualizan el mismo fenómeno desde diferentes puntos de vista: los diagramas de Bode, de Nyquist y de Nichols, que pueden representar cualquier función de transferencia pero la que más interés tiene es la ganancia de lazo $G(j\omega)H(j\omega)$.

2.1. Representación asintótica

El diagrama de Bode de una función de transferencia se representa mediante dos gráficas: la del logaritmo del módulo y la del ángulo de fase en función de ω . La representación de una magnitud logarítmica expresada en decibelios es:

$$G(j\omega)dB = 20 \log |G(j\omega)| \quad (2.3)$$

Cuando se trata de una relación de potencias la definición de decibelio sería:

$$G(j\omega)dB = 10 \log |G(j\omega)| \quad (2.4)$$

En los diagramas de Bode se emplea papel semilogarítmico, es decir, el eje de abscisas es realmente el $\log \omega$, y el eje de ordenadas está escalado normalmente, en dB.

Las ventajas de utilizar diagramas de Bode son que las multiplicaciones de magnitudes se convierten en sumas y las divisiones en restas. Además, la escala logarítmica del eje de abscisas permite ampliar el rango de bajas frecuencias, ya que, la frecuencia $\omega = 0$ se representa en el punto $\log 0 = -\infty$ en el eje de abscisas. Es decir, el eje de abscisas no tiene valores de ω negativos. Los valores negativos serían valores de ω menores que 1, por lo que su logaritmo es negativo. Con todo, la ventaja más importante es que si se representan las asíntotas, en lugar de la función exacta, el trazado es inmediato con sólo saber la situación de los polos y ceros de la función de transferencia.

Las bandas de frecuencia pueden venir dadas en **octavas** o en **décadas**, como se representa en la figura 2.2



Figura 2.2: Bandas de frecuencia en los diagramas de Bode

La frecuencia f_2 es n octavas más alta que f_1 cuando $f_2 = 2^n f_1$ y análogamente la definición de década sería $f_2 = 10^n f_1$. La octava se corresponde con una escala musical.

2.1.1. Factores básicos de $G(j\omega)$

En general la función de transferencia podría expresarse de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{K A_1(j\omega) A_2(j\omega) \cdots}{B_1(j\omega) B_2(j\omega) \cdots} \quad (2.5)$$

y en dB sería:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |K| + 20 \log |A_1(j\omega)| + 20 \log |A_2(j\omega)| - 20 \log |B_1(j\omega)| - 20 \log |B_2(j\omega)| - \cdots \quad (2.6)$$

y respecto a la fase:

$$\angle G(j\omega) = \angle K + \angle A_1(j\omega) + \angle A_2(j\omega) - \angle B_1(j\omega) - \angle B_2(j\omega) - \cdots \quad (2.7)$$

Obsérvese cómo al expresarlo en dB los factores se convierten en sumandos y la gráfica total, tanto del módulo como de la fase, será la suma de las gráficas parciales de cada sumando. Además, las funciones a representar son del tipo $f(\log \omega)$ lineales, por lo que si el eje de abscisas se toma $x = \log \omega$ en vez de ω las funciones $f(x)$ que hay que representar líneas rectas.

Teniendo en cuenta que las funciones de transferencia de sistemas reales sólo pueden tener polos o ceros reales o si los tienen complejos vendrán dados por pares conjugados, la forma de los diferentes factores que pueden aparecer son:

$$K \quad (j\omega)^{\pm 1} \quad \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)^{\pm 1} \quad \left[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$$

que se corresponderían con una ganancia constante, con un cero o polo en el origen, un cero o polo en el punto real ω_1 y por último los factores cuadráticos que corresponden a un par de ceros o polos complejos conjugados situados en $\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.

Si los polos o ceros son múltiples, el problema se reduce a sumar tantas veces la misma gráfica como orden de multiplicidad tenga.

El valor de ω_1 es real y positivo y estamos diciendo que existe un polo o cero en ω_1 . En el dominio de la frecuencia no es del todo apropiado hablar de polos y ceros. Su significación plena está en el dominio transformado. El término $j\omega + \omega_1$ se transformaría en $s + \omega_1$ y el polo, propiamente dicho, estaría situado en $s = -\omega_1$. Teniendo esto en cuenta, se seguirá hablando de polos y ceros en el dominio de la frecuencia.

a) Factor ganancia K

El módulo será $20 \log |K| = C^{te}$ y la fase podrá ser 0° o 180° . La representación, en el caso de K negativa, se indica en la figura 2.3

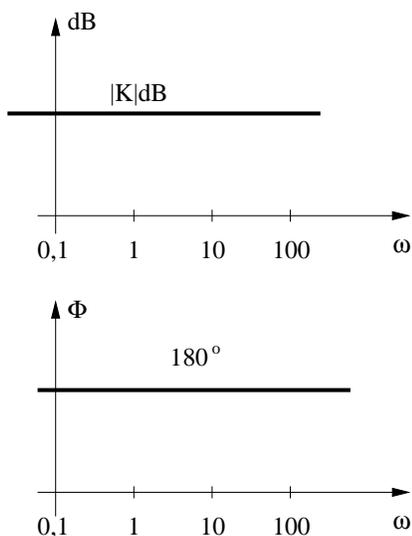


Figura 2.3: Representación exacta en diagramas de Bode de una constante negativa

b) Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm 1}$

En estos casos también se representa la función exacta y no las asíntotas.

En el caso de corresponder a un cero, el factor sería $(j\omega)$.

- Módulo de $(j\omega)$:

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB} \quad (2.8)$$

- Fase de $(j\omega)$:

$$\Phi = 90^\circ \quad (2.9)$$

En el caso de corresponder a un polo, el factor sería $(j\omega)^{-1}$.

- Módulo de $(j\omega)^{-1}$:

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB} \quad (2.10)$$

- Fase de $(j\omega)$:

$$\Phi = -90^\circ \quad (2.11)$$

El problema se reduce a representar funciones del tipo $\pm 20 \log \omega$ en un plano en el que el eje de abscisas es, precisamente, $\log \omega$ por lo que serán líneas rectas de pendiente $\pm 20 \text{ dB/década}$ que pasan por el origen. Si la pendiente se expresara en dB/octava la relación lineal entre ellas es: $20 \text{ dB/década} = 6 \text{ dB/octava}$.

Su representación gráfica se muestra en la figura 2.4

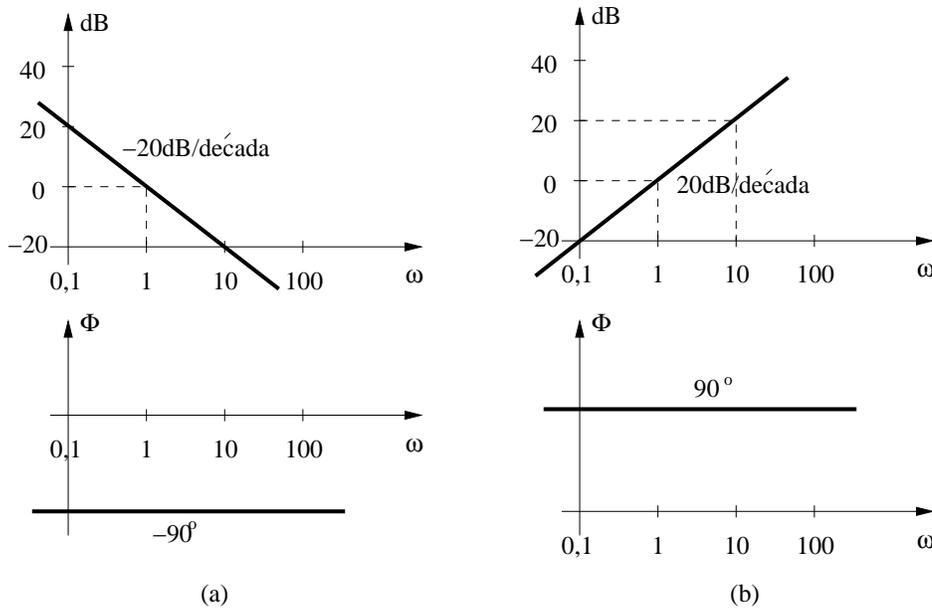


Figura 2.4: Representación exacta en diagramas de Bode de (a) factor integral $(j\omega)^{-1}$ y (b) factor derivativo $(j\omega)$

Nótese que el origen está situado en el punto $(\omega, \text{dB}) = (1, 0)$ que en papel semilogarítmico sería $(\log \omega, \text{dB}) = (0, 0)$.

- c) **Factores de primer orden** $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^{\pm 1}$ En el caso de un cero:

- Módulo de $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})$:

$$20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_1} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} = \begin{cases} \omega < \frac{\omega_1}{10} \implies \simeq 20 \log 1 = 0 \text{ dB} & \text{Asíntota 1} \\ \omega_c = \omega_1 \implies = 10 \log 2 = 3 \text{ dB} & \\ \omega > 10\omega_1 \implies \simeq 20 \log \omega - 20 \log \omega_1 & \text{Asíntota 2} \end{cases} \quad (2.12)$$

- Fase de $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})$:

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_1} = \begin{cases} \omega < \frac{\omega_1}{10} \implies \simeq \tan^{-1} 0, 1 \simeq 0^\circ & \text{Asíntota 1} \\ \omega_c = \omega_1 \implies = \tan^{-1} 1 = 45^\circ & \\ \omega > 10\omega_1 \implies \simeq \tan^{-1} 10 \simeq 90^\circ & \text{Asíntota 2} \end{cases} \quad (2.13)$$

La representación de las asíntotas y de la curva exacta se indica en la figura 2.5

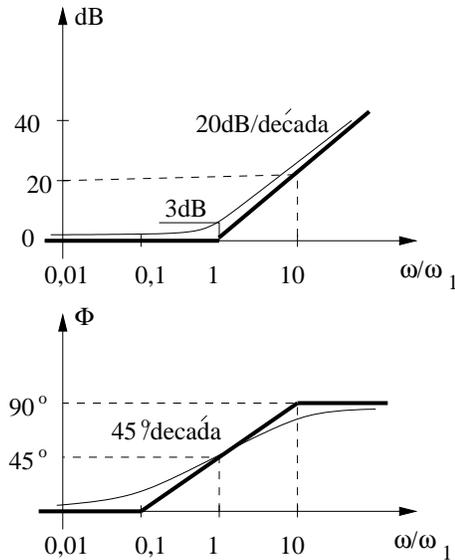


Figura 2.5: Representación asintótica de Bode del factor de primer orden $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})$

Si se tratara de un polo el factor sería: $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^{-1}$ y las gráficas resultantes serían las mismas pero cambiando el signo de las pendientes como se muestra en la figura 2.6

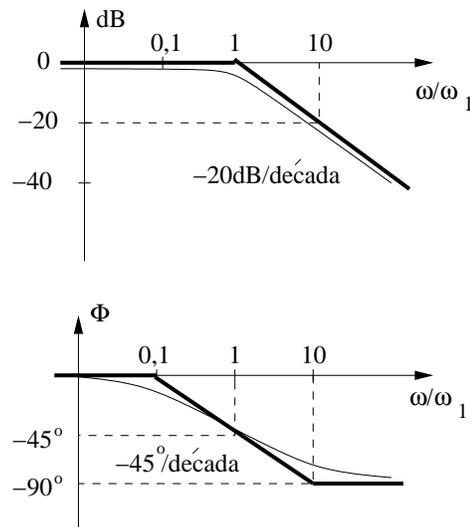


Figura 2.6: Representación asintótica de Bode del factor de primer orden $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^{-1}$

En el caso de ser un cero o polo doble se multiplicarían por 2 las pendientes.

- d) **Factores de segundo orden** $[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{\pm 1}$

En el caso de dos ceros conjugados:

- Módulo de $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]$:

$$20 \log \left| 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2 \right| = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} =$$

$$= \begin{cases} \omega < \frac{\omega_n}{10} \implies \simeq 20 \log 1 = 0dB & \text{Asíntota 1} \\ \omega_c = \omega_n \implies = 20 \log 2\xi = 6dB + \xi dB \\ \omega > 10\omega_n \implies \simeq 40 \log \omega - 40 \log \omega_n & \text{Asíntota 2} \end{cases} \quad (2.14)$$

La pendiente de la asíntota 2 es de 40dB/década como corresponde a dos ceros.

- Fase de $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]$:

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} \omega < \frac{\omega_n}{10} \implies \simeq \tan^{-1}(0, 2\xi) \simeq 0^0 & \text{Asíntota 1} \\ \omega = \omega_n \implies = \tan^{-1} \infty = 90^0 \\ \omega > 10\omega_n \implies \simeq \tan^{-1}(-0, 2\xi) \simeq 180^0 & \text{Asíntota 2} \end{cases} \quad (2.15)$$

Si se tratara de dos polos complejos conjugados el factor sería: $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{-1}$ y las gráficas resultantes serían las mismas pero cambiando el signo de las pendientes como se muestra en la figura 2.7

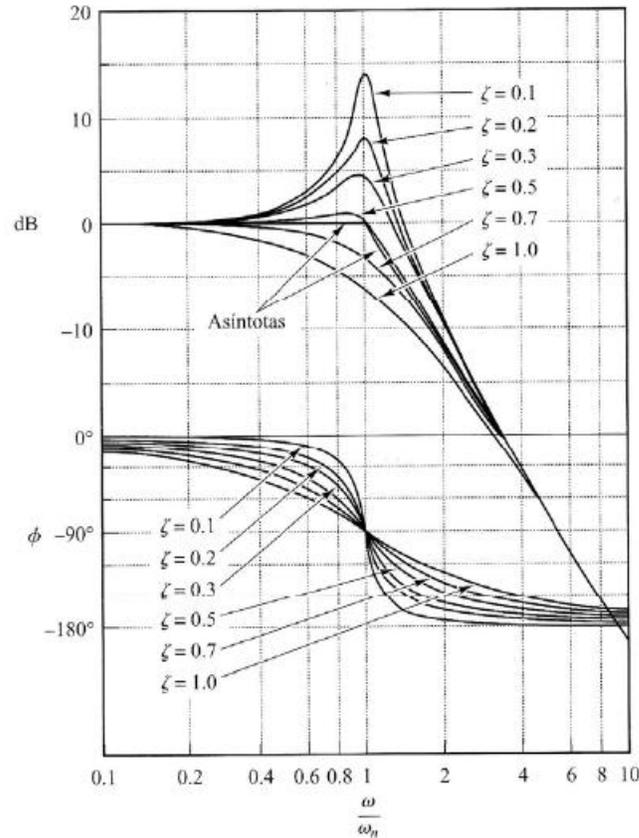


Figura 2.7: Representación asintótica de Bode del factor cuadrático $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{-1}$

Con coeficientes de amortiguamiento pequeños aparecen sobreimpulsos que pueden llegar a ser peligrosos.

El módulo del factor $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{-1}$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.16)$$

El mayor sobreimpulso (pico de resonancia) ocurre cuando sea mínimo $f(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$.

Derivando e igualando a cero se obtiene la pulsación de resonancia:

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) \left(\frac{-2\omega}{\omega_n^2}\right) + \frac{8\xi^2\omega}{\omega_n^2} &= 0 \\ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} &= 2\xi^2 \\ \omega_r &= \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta frecuencia es real y positiva siempre que $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$. Cuando $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ la frecuencia de resonancia es imaginaria, es decir, no existe y tampoco habrá pico resonante. Por otro lado, si $\xi \rightarrow 0$ la frecuencia de resonancia ω_r tiende a la frecuencia natural ω_n y si $\xi \rightarrow 0,707$ la frecuencia de resonancia tiende a cero. La frecuencia natural amortiguada ω_d que aparece en la respuesta transitoria valía $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}$ que siempre es mayor que la frecuencia de resonancia.

Para $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, sustituyendo el valor de la frecuencia de resonancia de la ecuación 2.17, en la ecuación 2.16, se obtiene el pico de resonancia M_r :

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.18)$$

Para $\xi \geq 0,707$ $M_r = 1$ no existe pico de resonancia. Debe recordarse que con $0,707 < \xi < 1$ la respuesta es oscilatoria, pero las oscilaciones están muy amortiguadas y apenas son perceptibles.

Si el coeficiente de amortiguamiento es nulo, (la frecuencia de resonancia ω_r coincide con la frecuencia natural ω_n), el sobreimpulso es infinito y el sistema se destruiría. Por eso es tan importante estudiar la frecuencia natural de puentes y otras estructuras que pueden venirse abajo si son excitadas con esta frecuencia.

2.2. Trazado de diagramas de Bode

Sea la ganancia $G(j\omega)$, con ω en rad/s:

$$G(j\omega) = \frac{200(j\omega + 5)^2}{j\omega(j\omega + 1)[(j\omega)^2 + 20j\omega + 2500]} \quad (2.19)$$

Esta función tiene un cero doble en $\omega_{z1} = 5$ rad/s y dos polos reales en $w_{p1} = 0$ y $w_{p2} = 1$ rad/s y dos polos complejos conjugados dados por $\omega_n = \sqrt{2500} = 50$ rad/s y $2\xi\omega_n = 20$, es decir $\xi = 0,2$ y por lo tanto los polos complejos conjugados están situados en:

$$w_{p3,4} = \xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 10 \pm j48,99 \quad (2.20)$$

De todas formas, los valores que interesan para representar el factor cuadrático son los de ω_n y ξ sabiendo que para valores por debajo de $\xi = 0,5$ ya aparecen sobreimpulsos importantes.

Lo primero que habría que hacer es poner los factores en la forma estudiada, es decir:

$$G(j\omega) = \frac{200 \cdot 5^2 (1 + \frac{j\omega}{5})^2}{2500j\omega(1 + \frac{j\omega}{1}) \left[1 + \frac{20}{2500}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{2500}\right]} = \frac{2(1 + \frac{j\omega}{5})^2}{j\omega(1 + \frac{j\omega}{1}) \left[1 + \frac{20}{2500}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{2500}\right]} \quad (2.21)$$

■ Módulo

Se calcula en dB:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 6dB + 40 \log \left|1 + \frac{j\omega}{5}\right| - 20 \log \omega - 20 \log |1 + j\omega| - 20 \log \left|1 + \frac{20}{50} \left(\frac{j\omega}{50}\right) + \left(\frac{j\omega}{50}\right)^2\right| \quad (2.22)$$

La representación de cada uno de estos sumandos por separado y el resultado de su suma algebraica se indica en la figura 2.8

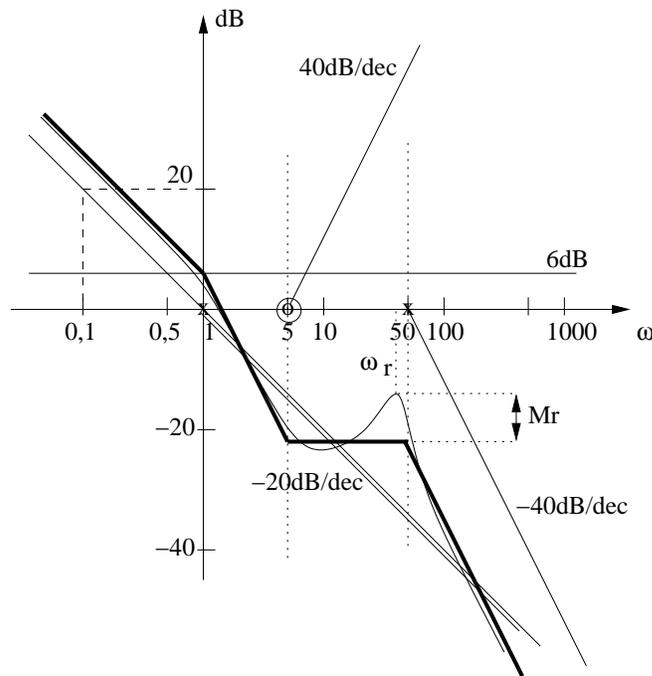


Figura 2.8: Representación asintótica de Bode del módulo del ejemplo

■ Fase

El valor de la fase es:

$$\Phi = 2 \tan^{-1} \frac{\omega}{5} - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{20\omega}{2500 - \omega^2} \quad (2.23)$$

La representación de cada uno de los sumandos y su resultante se muestra en la figura 2.9

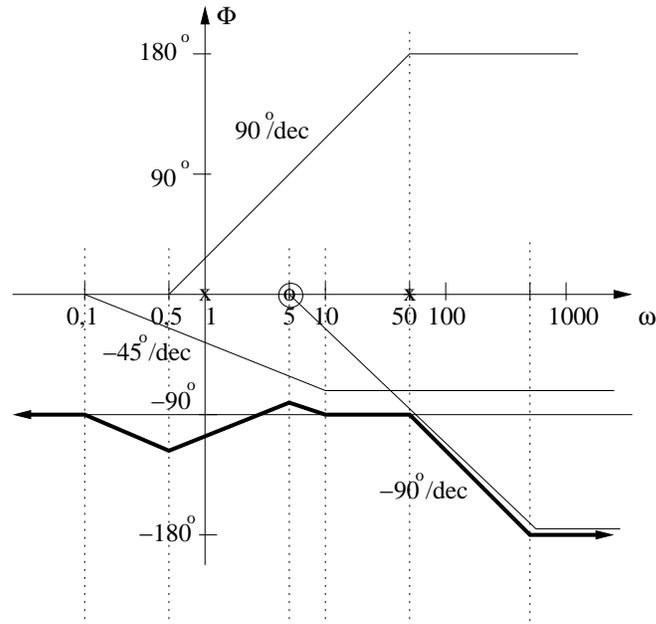


Figura 2.9: Representación asintótica de Bode de la fase del ejemplo

Observando el valor inicial de la pendiente en los diagramas de Bode puede deducirse el tipo del sistema. Si la gráfica del módulo comienza horizontal, el sistema es de tipo cero. Si comienza con una pendiente de -20 dB/década es de tipo 1 y si la pendiente es de -40 dB/década es de tipo 2. Los coeficientes estáticos de error de posición, de velocidad y de aceleración también se reflejan en los diagramas de Bode, según se indica en la figura 2.10

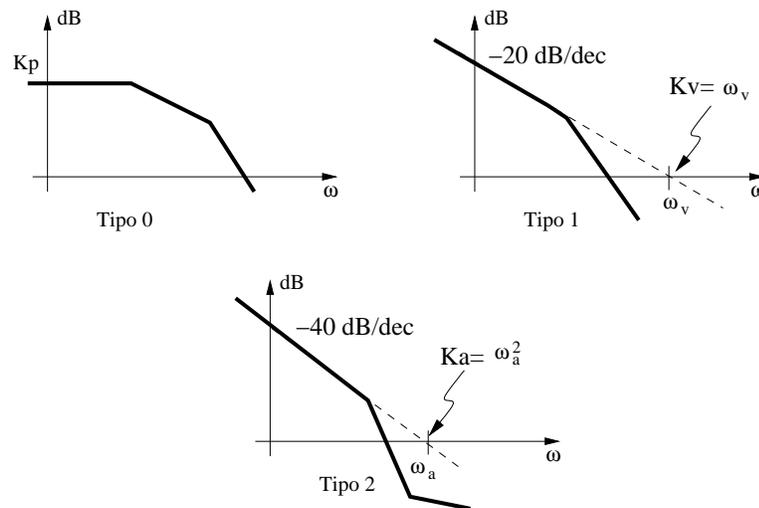


Figura 2.10: Tipo y errores estáticos en los diagramas de Bode

2.3. Trazado rápido

Habiéndose justificado la representación de los diagramas de Bode, se exponen a continuación las reglas que permiten trazarlos directamente.

■ **Módulo**

1. Situar los polos y ceros indicando claramente si son sencillos o múltiples. En el caso de factores cuadráticos situar el valor de ω_n
2. Obtener el valor, o bien la pendiente, con la que parte la gráfica desde $-\infty$ haciendo $\omega \rightarrow 0$
3. Cada cero simple introduce una pendiente de $+20$ dB/década. Si es múltiple de orden n , la pendiente será $+20n$ dB/década
4. Cada polo simple introduce una pendiente de -20 dB/década. Si es múltiple de orden n , la pendiente será $-20n$ dB/década
5. Comprobar el valor, o la pendiente, con la que finaliza la gráfica haciendo $\omega \rightarrow \infty$
6. Si la gráfica no empieza ni termina en valores concretos sino en pendientes es necesario determinar un punto por el que pase. Para ello, se toma un valor de ω alejado al menos una década de cualquier polo o cero y se calcula el módulo de la función de transferencia de forma aproximada, despreciando los sumandos frente a los que sean 10 veces mayor.

■ **Aplicación al módulo del ejemplo anterior**

$$G(j\omega) = \frac{200(j\omega + 5)^2}{j\omega(j\omega + 1)[(j\omega)^2 + 20j\omega + 2500]} \quad (2.24)$$

El valor con el que se inicia la gráfica es:

$$G(0) = \frac{200 \cdot 5^2}{j\omega 2500} = \frac{2}{j\omega} \quad (2.25)$$

Al ser $\omega = 0$, el valor con el que se inicia es ∞ pero conservo los términos en $j\omega$ porque me permite saber que trae una pendiente de -20 dB/década y una fase de -90° .

Como no conozco un valor inicial desde el que partir, tomo un valor de ω alejado al menos una década de todos los polos y ceros, por ejemplo $\omega = 0,1$ rad/s y calculo de forma aproximada el módulo de la función de transferencia:

$$|G(j\omega)| \simeq \left| \frac{200 \cdot 5^2}{j0,1 \cdot 2500} \right| = 20 = 26 \text{ dB} \quad (2.26)$$

En la figura 2.8 puede comprobarse este valor.

A partir de este valor se van aplicando los puntos 3 y 4 y se termina comprobando el valor, o la pendiente, final.

$$G(\infty) = \frac{200(j\omega)^2}{j\omega(j\omega)(j\omega)^2} = \frac{200}{(j\omega)^2} \quad (2.27)$$

La gráfica finaliza con una pendiente de -40 dB/década. En la figura 2.11 puede seguirse el desarrollo descrito.

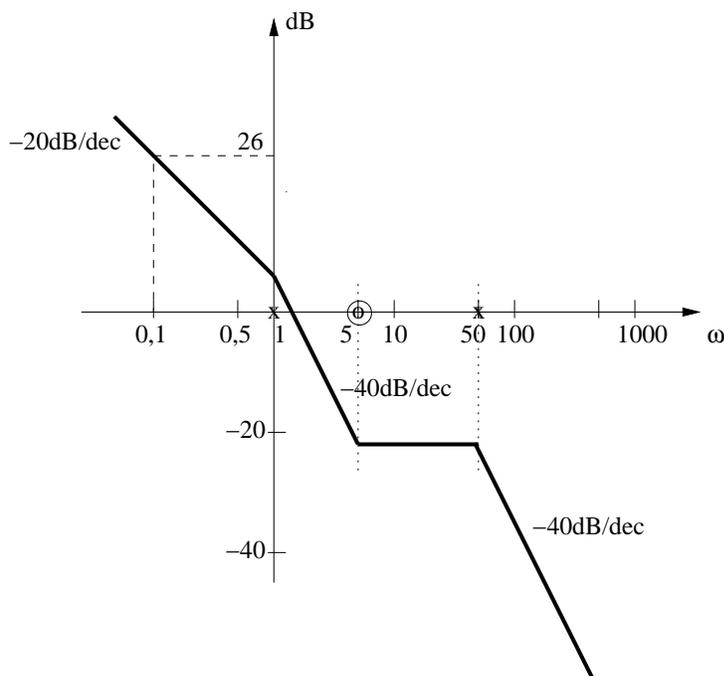


Figura 2.11: Representación rápida del módulo del ejemplo

■ Fase

1. Situar los polos y ceros indicando claramente si son sencillos o múltiples. En el caso de factores cuadráticos situar el valor de ω_n
2. Marcar una década antes y otra después de cada uno de los polos y ceros.
3. Obtener el valor de la fase con la que parte la gráfica desde $-\infty$ haciendo $\omega \rightarrow 0$
4. Cada cero simple introduce una pendiente de $+45^\circ/\text{década}$ durante dos décadas: la anterior y la siguiente al valor del cero. Si es múltiple de orden n , la pendiente será $+45n^\circ/\text{década}$
5. Cada polo simple introduce una pendiente de $-45^\circ/\text{década}$ durante dos décadas: la anterior y la siguiente al valor del polo. Si es múltiple de orden n , la pendiente será $-45n^\circ/\text{década}$
6. Comprobar el valor, o la pendiente, con la que finaliza la gráfica haciendo $\omega \rightarrow \infty$

■ Aplicación a la fase del ejemplo anterior

$$G(j\omega) = \frac{200(j\omega + 5)^2}{j\omega(j\omega + 1)[(j\omega)^2 + 20j\omega + 2500]} \quad (2.28)$$

El desarrollo puede seguirse en la figura 2.12

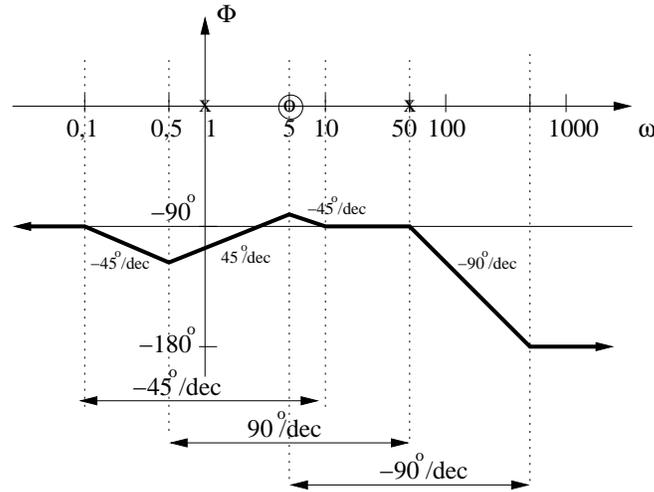


Figura 2.12: Representación rápida de la fase del ejemplo

Se sitúan los ceros y polos y se marcan las pendientes que introducen en sus dos décadas correspondientes.

El valor inicial de la fase es:

$$G(0) = \frac{200 \cdot 5^2}{j\omega 2500} = \frac{2}{j\omega} \quad (2.29)$$

por lo que la fase inicial es de -90° .

A partir de ahí se introducen las pendientes correspondientes a cada tramo y se comprueba el valor final:

$$G(\infty) = \frac{200(j\omega)^2}{j\omega(j\omega)(j\omega)^2} = \frac{200}{(j\omega)^2} \quad (2.30)$$

La fase final es de -180° .

Es importante notar que la expresión de la función de transferencia puede venir dada de dos formas diferentes:

$$G(s)H(s) = K_1 \frac{(s + \omega_{z1})(s + \omega_{z2}) \cdots}{(s + \omega_{p1})(s + \omega_{p2}) \cdots} \quad (2.31)$$

o bien:

$$G(s)H(s) = K_1 \frac{(\frac{s}{\omega_{z1}} + 1)(\frac{s}{\omega_{z2}} + 1) \cdots}{(\frac{s}{\omega_{p1}} + 1)(\frac{s}{\omega_{p2}} + 1) \cdots} \quad (2.32)$$

La ganancia K en baja frecuencia se calcula haciendo $s \rightarrow 0$ por lo que en el primer caso:

$$K = G(0)H(0) = K_1 \frac{\omega_{z1}\omega_{z2} \cdots}{\omega_{p1}\omega_{p2} \cdots} \quad (2.33)$$

y en el segundo:

$$K = G(0)H(0) = K_1 \quad (2.34)$$

Capítulo 3

Compensación o diseño de PID

3.1. Problema 1

Un sistema, con realimentación unitaria, tiene una función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (3.1)$$

Para que se cumplan las especificaciones de respuesta transitoria: $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\omega_n = 2$ rad/seg

- Diseñar un regulador PD real mediante el método de cancelación cero-polo.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la bisectriz.

Solución

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.2)$$

y sustituyendo los valores de ξ y ω_n :

$$s^2 + 2\sqrt{2}s + 4 = 0 \quad (3.3)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\sqrt{2} \pm j\sqrt{2} \quad (3.4)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.5)$$

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \frac{1}{s(s+1)} \quad (3.6)$$

a) Cancelación cero-polo

Como se indica que el PD es real, tanto el cero ω_z como el polo ω_p del compensador serán reales. El cero del compensador ω_z cancelará el polo de la función de transferencia sin compensar, es decir $\omega_z = 1$:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+\omega_p} \frac{1}{s(s+1)} = K_c \frac{1}{s(s+\omega_p)} \quad (3.7)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.8)$$

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.9)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.10)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.130, es decir, que el módulo de $G_c(s)G(s)H(s)$ sea la unidad (condición de amplitud) y su fase $\pm 180^\circ$ (condición de fase).

En la figura 3.1 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-135^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 45^\circ \quad (3.11)$$

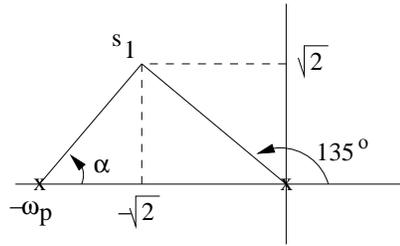


Figura 3.1: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de ω_p será:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{\omega_p - \sqrt{2}} = 1 \\ \omega_p &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

El valor de K_c se obtiene de la condición de amplitud:

$$\begin{aligned} |G_c(s)G(s)H(s)| &= 1 \\ \left| K_c \frac{1}{s(s+\omega_p)} \right|_{s=-\sqrt{2}+j\sqrt{2}} &= \left| K_c \frac{1}{s(s+2\sqrt{2})} \right|_{s=-\sqrt{2}+j\sqrt{2}} = \frac{K_c}{4} = 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$K_c = 4$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 4 \frac{s+1}{s+2\sqrt{2}} \quad (3.14)$$

b) Método de la bisectriz

Es un método que suele hacerse gráficamente pero aquí lo resolveremos analíticamente.

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado $s_1 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$ se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.2

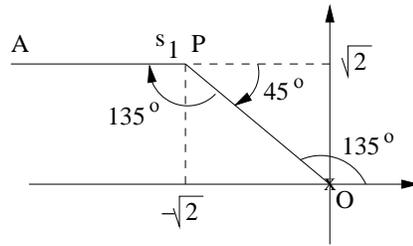


Figura 3.2: Ángulo del que hay que hallar la bisectriz

2.- Se traza la bisectriz PB y se hallan los ángulos de interés como se indica en la figura 3.3

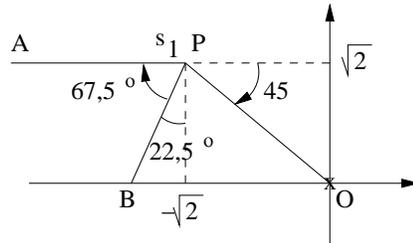


Figura 3.3: Bisectriz PB

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador

El polo en lazo cerrado s_1 ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.15)$$

Es decir:

$$\angle \frac{1}{s_1(s_1 + 1)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.16)$$

$$\angle \frac{1}{s_1(s_1 + 1)} = -135^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -135^\circ - 106^\circ = -241^\circ \quad (3.17)$$

por lo que:

$$\phi = 241^\circ - 180^\circ = 61^\circ \quad (3.18)$$

4.- A cada lado de la bisectriz, se trazan las rectas que forman con ella un ángulo de $\phi/2 = 30,5^\circ$ como se indica en la figura 3.4

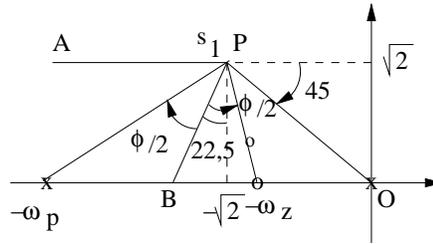


Figura 3.4: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

$$\tan(22,5^\circ + 30,5^\circ) = \tan 53^\circ = \frac{\omega_p - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (3.19)$$

$$\omega_p = \sqrt{2} + \sqrt{2} \tan 53^\circ = 3,29 \quad (3.20)$$

y el cero en:

$$\tan(30,5^\circ - 22,5^\circ) = \tan 8^\circ = \frac{\sqrt{2} - \omega_z}{\sqrt{2}} \quad (3.21)$$

$$\omega_z = \sqrt{2} - \sqrt{2} \tan 8^\circ = 1,21 \quad (3.22)$$

6.- La ganancia del compensador se obtiene de la condición de módulo que ha de cumplir el polo $s_1 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$:

$$\left| K_c \frac{s_1 + 1,21}{s_1 + 3,29} \frac{1}{s_1(s_1 + 1)} \right| = 1 \quad K_c = 1,8 \quad (3.23)$$

La función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = 1,8 \frac{s + 1,21}{s + 3,29} \quad (3.24)$$

3.2. Problema 2

Un sistema, con realimentación unitaria, tiene una función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)} \quad (3.25)$$

Para que se cumplan las especificaciones de respuesta transitoria: $\xi = \frac{1}{2}$ y $\omega_n = 5 \text{ rad/seg}$

- Diseñar un regulador PD real mediante el método de cancelación cero-polo.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la bisectriz.

Solución

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.26)$$

y sustituyendo los valores de ξ y ω_n :

$$s^2 + 5s + 25 = 0 \quad (3.27)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en las raíces de la ecuación anterior:

$$s_{1,2} = -2,5 \pm j2,5\sqrt{3} \quad (3.28)$$

También se podrían haber puesto directamente sin resolver la ecuación:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2,5 \pm j2,5\sqrt{3} \quad (3.29)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.30)$$

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \frac{K}{s(s+3)} \quad (3.31)$$

En general, cuando el sistema esté compensado la ecuación característica (lazo cerrado) será:

$$1 + G(s)H(s)G_c(s) = 0 \quad \text{o bien} \quad G(s)H(s)G_c(s) = -1 \quad (3.32)$$

cuya representación sería, precisamente, el lugar de las raíces del sistema compensado en lazo cerrado. En un punto cualquiera s_1 del lugar de las raíces se tendrá que cumplir la condición de fase:

$$\angle G(s_1)H(s_1)G_c(s_1) = 180^\circ \quad (3.33)$$

y la condición de módulo:

$$|G(s_1)H(s_1)G_c(s_1)| = 1 \quad (3.34)$$

La condición de módulo puede ponerse como:

$$|G(s_1)H(s_1)| \cdot |G_c(s_1)| = 1 \quad (3.35)$$

y normalmente se ajusta K para que $|G(s_1)H(s_1)| = 1$ y así la condición que hay que imponer al compensador es $|G_c(s_1)| = 1$.

En nuestro caso el ajuste de K sería:

$$\left| \frac{K}{s_1(s_1+3)} \right| = \left| \frac{K}{(-2,5 + j2,5\sqrt{3})(-2,5 + j2,5\sqrt{3} + 3)} \right| = \frac{K}{21,8} = 1 \quad (3.36)$$

por lo que $K = 21,8$

a) Cancelación cero-polo

Como se indica que el PD es real, tanto el cero ω_z como el polo ω_p del compensador serán reales. El cero del compensador ω_z cancelará el polo de la función de transferencia sin compensar, es decir $\omega_z = 3$:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s+3}{s+\omega_p} \frac{21,8}{s(s+3)} = K_c \frac{21,8}{s(s+\omega_p)} \quad (3.37)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.38)$$

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.39)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.40)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.130, es decir, que el módulo de $G_c(s)G(s)H(s)$ sea la unidad (condición de amplitud) y su fase $\pm 180^\circ$ (condición de fase).

En la figura 3.5 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-120^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 60^\circ \quad (3.41)$$

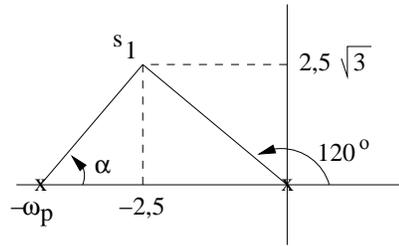


Figura 3.5: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de ω_p será:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan 60^\circ = \frac{2,5\sqrt{3}}{\omega_p - 2,5} = \sqrt{3} \\ \omega_p &= 5 \end{aligned} \quad (3.42)$$

El valor de K_c se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación s_1 , que puesto que se ha ajustado K para que $|G(s)H(s)| = 1$ se traduce en:

$$\begin{aligned} |G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| &= |G_c(s_1)| = 1 \\ \left| K_c \frac{s_1+3}{s_1+5} \right| &= \frac{4,35K_c}{5} = 1 \quad K_c = 1,14 \end{aligned} \quad (3.43)$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 1,14 \frac{s+3}{s+5} \quad (3.44)$$

b) Método de la bisectriz

Es un método que suele hacerse gráficamente pero aquí lo resolveremos analíticamente.

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado $s_1 = -2,5 + j2,5\sqrt{3}$ se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.6

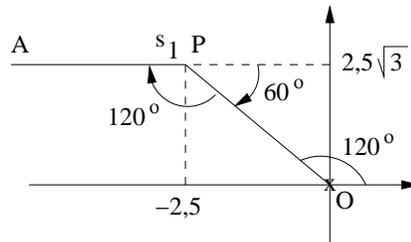


Figura 3.6: Ángulo del que hay que hallar la bisectriz

2.- Se traza la bisectriz PB y se hallan los ángulos de interés como se indica en la figura 3.7

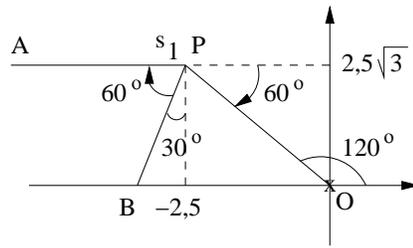


Figura 3.7: Bisectriz PB

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador
El polo en lazo cerrado s_1 ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.45)$$

Es decir:

$$\angle \frac{21,8}{s_1(s_1 + 3)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.46)$$

$$\angle \frac{21,8}{s_1(s_1 + 3)} = -120^\circ - \tan^{-1} \frac{2,5\sqrt{3}}{0,5} = -120^\circ - 83,41^\circ = -203,41^\circ \quad (3.47)$$

por lo que:

$$\phi = 203,41^\circ - 180^\circ = 23,41^\circ \quad (3.48)$$

4.- A cada lado de la bisectriz, se trazan las rectas que forman con ella un ángulo de $\phi/2 = 11,7^\circ$ como se indica en la figura 3.8

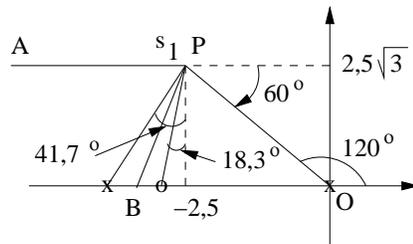


Figura 3.8: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

$$\tan 41,7^\circ = \frac{\omega_p - 2,5}{2,5\sqrt{3}} \quad (3.49)$$

$$\omega_p = 2,5 + 2,5\sqrt{3} \tan 41,7^\circ = 6,35 \text{ rad/s} \quad (3.50)$$

y el cero en:

$$\tan 18,3^\circ = \frac{\omega_z - 2,5}{2,5\sqrt{3}} \quad (3.51)$$

$$\omega_z = 2,5 + 2,5\sqrt{3} \tan 18,3^\circ = 3,93 \text{ rad/s} \quad (3.52)$$

6.- La ganancia del compensador se obtiene de la condición de módulo que ha de cumplir el polo $s_1 = -2,5 + j2,5\sqrt{3}$:

$$\left| K_c \frac{s_1 + 3,93}{s_1 + 6,35} \frac{21,8}{s_1(s_1 + 3)} \right| = 1 \quad K_c = 1,26 \quad (3.53)$$

La función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = 1,26 \frac{s + 3,93}{s + 6,35} \quad (3.54)$$

3.3. Problema 3

Un sistema con realimentación unitaria tiene una función de transferencia el lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)} \quad (3.55)$$

Para que se cumplan las especificaciones de respuesta transitoria: $\xi = 0,4$ y $\omega_n = 1,4$ rad/seg

- Diseñar un regulador PD real mediante el método de cancelación cero-polo.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la vertical.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la bisectriz.
- Justificar cual es el mejor método.

Solución

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.56)$$

y sustituyendo los valores de ξ y ω_n :

$$s^2 + 1,12s + 1,96 = 0 \quad (3.57)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:

$$s_{1,2} = -0,56 \pm j1,28 \quad (3.58)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.59)$$

Ajustando la ganancia K para que $|G(s_1)H(s_1)| = 1$ se obtiene:

$$|G(s_1)H(s_1)| = \left| \frac{K}{s_1(s_1+1)(s_1+3)} \right| = \frac{K}{5,17} = 1 \quad K = 5,17 \quad (3.60)$$

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \frac{5,17}{s(s+1)(s+3)} \quad (3.61)$$

a) Cancelación cero-polo

Como se indica que el PD es real, tanto el cero ω_z como el polo ω_p del compensador serán reales. El cero del compensador ω_z cancelará el primer polo, que no esté en el eje imaginario, de la función de transferencia sin compensar, es decir $\omega_z = 1$:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+\omega_p} \frac{5,17}{s(s+1)(s+3)} = K_c \frac{5,17}{s(s+3)(s+\omega_p)} \quad (3.62)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.63)$$

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.64)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.65)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.130, es decir, que el módulo de $G_c(s)G(s)H(s)$ sea la unidad (condición de amplitud) y su fase $\pm 180^\circ$ (condición de fase).

En la figura 3.9 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-114^\circ - 28^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 38^\circ \quad (3.66)$$

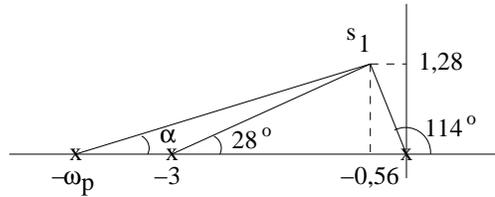


Figura 3.9: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de ω_p será:

$$\tan \alpha = \tan 38^\circ = \frac{1,28}{\omega_p - 0,56} = 0,78 \quad (3.67)$$

$$\omega_p = 2,2 \text{ rad/s}$$

El valor de K_c se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación s_1 :

$$|G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| K_c \frac{5,17}{s_1(s_1+3)(s_1+\omega_p)} \right| = \left| K_c \frac{5,17}{(-0,56+j1,28)(-0,56+j1,28+3)(-0,56+j1,28+2,2)} \right| = \frac{K_c 5,17}{8,14} = 1 \quad (3.68)$$

$$K_c = 1,57$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 1,57 \frac{s+1}{s+2,2} \quad (3.69)$$

b) **Método de la vertical** Consiste en colocar el cero del compensador en la vertical del polo en lazo cerrado s_1 y sobre el eje real, es decir, $\omega_z = 0,56$.

En la figura 3.10 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-114^\circ + 90^\circ - 71^\circ - 28^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 57^\circ \quad (3.70)$$

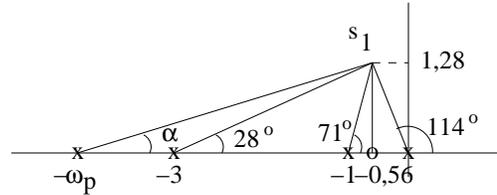


Figura 3.10: Condición de fase del polo con compensador PD según el criterio de la vertical

El valor de ω_p será:

$$\tan \alpha = \tan 57^\circ = \frac{1,28}{\omega_p - 0,56} = 1,53$$

$$\omega_p = 1,4 \text{ rad/s} \quad (3.71)$$

El valor de K_c se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación s_1 :

$$|G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| K_c \frac{5,17(s_1+0,56)}{s_1(s_1+1)(s_1+3)(s_1+\omega_p)} \right| = \left| K_c \frac{5,17j1,28}{(-0,56+j1,28)(-0,56+j1,28+1)(-0,56+j1,28+3)(-0,56+j1,28+1,4)} \right| = \frac{K_c 5,17}{6,31} = 1$$

$$K_c = 1,22 \quad (3.72)$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 1,22 \frac{s + 0,56}{s + 1,4} \quad (3.73)$$

b) Método de la bisectriz

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado $s_1 = -0,56 + j1,28$ se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.11

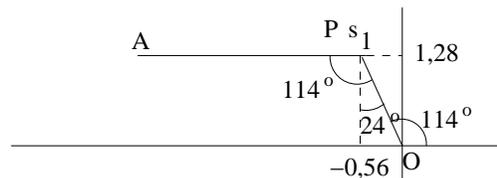


Figura 3.11: Ángulo del que hay que hallar la bisectriz

2.- Se traza la bisectriz PB y se hallan los ángulos de interés como se indica en la figura 3.12

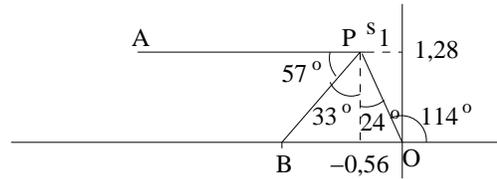


Figura 3.12: Bisectriz PB

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador

El polo en lazo cerrado s_1 ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.74)$$

Es decir:

$$\angle \frac{5,17}{s_1(s_1+1)(s_1+3)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.75)$$

$$\angle \frac{5,17}{s_1(s_1+1)(s_1+3)} = -114^\circ - \tan^{-1} \frac{1,28}{1-0,56} - \tan^{-1} \frac{1,28}{3-0,56} = -212,68^\circ \quad (3.76)$$

por lo que:

$$\phi = 212,68^\circ - 180^\circ = 32,68^\circ \quad (3.77)$$

4.- A cada lado de la bisectriz, se trazan las rectas que forman con ella un ángulo de $\phi/2 = 16,34^\circ$ como se indica en la figura 3.13

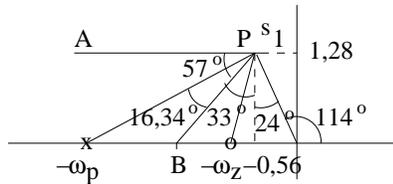


Figura 3.13: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

$$\tan(16,34^\circ + 33^\circ) = \tan 49,34^\circ = \frac{\omega_p - 0,56}{1,28} \quad (3.78)$$

$$\omega_p = 0,56 + 1,28 \tan 49,34^\circ = 2,05 \text{ rad/s} \quad (3.79)$$

y el cero en:

$$\tan(33^\circ - 16,34^\circ) = \tan 16,26^\circ = \frac{\omega_z - 0,56}{1,28} \quad (3.80)$$

$$\omega_z = 0,56 + 1,28 \tan 16,26^\circ = 0,93 \text{ rad/s} \quad (3.81)$$

6.- La ganancia del compensador se obtiene de la condición de módulo que ha de cumplir el polo $s_1 = -0,56 + j1,28$:

$$\left| K_c \frac{s_1 + 0,93}{s_1 + 2,05} \frac{5,17}{s_1(s_1+1)(s_1+3)} \right| = 1 \quad K_c = 1,45 \quad (3.82)$$

La función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = 1,45 \frac{s + 0,93}{s + 2,05} \quad (3.83)$$

d) Comparación de métodos En este caso, con el que se obtiene menor ganancia es con el de la vertical y eso conlleva ventajas económicas, de menor potencia y componentes menores.

Para comparar el ancho de banda, sobreimpulso, velocidad, etc se podría obtener la respuesta al escalón y comparar los resultados.

3.4. Problema 4

La función de transferencia de la planta $G(s)$, en un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2,5)(s^2 + 2s + 1,75)} \quad (3.84)$$

Diseñar un regulador real $G_R(s)$ para que el sistema cumpla las siguientes especificaciones:

Tiempo de establecimiento al 2%: 3 seg.

Sobreimpulso máximo: 20,78%.

Solución

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,2078 = 1,57 \quad \xi = 0,446 \quad (3.85)$$

y del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 3 = \frac{4}{0,446\omega_n} \quad \omega_n = 2,98 \text{ rad/s} \quad (3.86)$$

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.87)$$

y sustituyendo los valores de ξ y ω_n :

$$s^2 + 2,658s + 8,88 = 0 \quad (3.88)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:

$$s_{1,2} = -1,33 \pm j2,66 \quad (3.89)$$

Con el compensador se va a cancelar el término de segundo grado e introducir un nuevo polo, de modo que la ecuación característica de la función de transferencia en lazo cerrado sea $s^2 + 2,658s + 8,88$. Es decir:

$$G_R(s) = K_c \frac{s^2 + 2s + 1,75}{s + \omega_p} \quad (3.90)$$

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_R(s) = \frac{K_c}{(s + \omega_p)(s + 2,5)} \quad (3.91)$$

En la figura 3.14 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-66,75^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 113,75^\circ \simeq 114^\circ \quad (3.92)$$

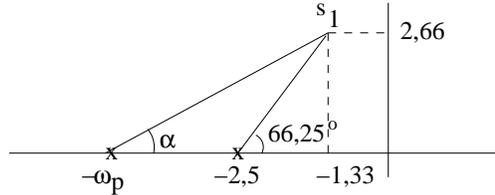


Figura 3.14: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El hecho de que α salga mayor de 90° indica que el polo del compensador está situado a la derecha de $-1,33$, como se indica en la figura 3.15

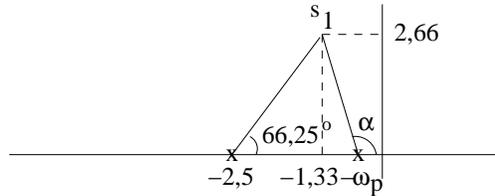


Figura 3.15: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de ω_p será:

$$\begin{aligned} \tan(180^\circ - \alpha) &= \tan(180^\circ - 114^\circ) = \frac{2,66}{1,33 - \omega_p} = 2,27 \\ \omega_p &= 0,15 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (3.93)$$

El valor de K_c se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación s_1 :

$$\begin{aligned} |G_R(s_1)G(s_1)H(s_1)| &= 1 \\ \left| \frac{K_c}{(s_1 + \omega_p)(s_1 + 2,5)} \right| &= \left| \frac{K_c}{(s_1 + 0,15)(s_1 + 2,5)} \right| = \frac{K_c}{8,45} = 1 \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$K_c = 8,45$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_R(s) = 8,45 \frac{s^2 + 2s + 1,75}{s + 0,15} \quad (3.95)$$

3.5. Problema 5

Una planta con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4} \quad (3.96)$$

se realimenta unitariamente por lo que su lugar de las raíces se encuentra sobre los ejes del plano complejo. Mediante un regulador real se desea que cumpla las siguientes especificaciones: coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0,55$ y tiempo de pico $t_p = 2,1$ seg.

- Diseñar el regulador que produzca la respuesta temporal deseada.
- Justificar razonadamente el regulador y el método de diseño utilizado.

Solución

En lazo abierto y sin compensación, los polos están situados en $s_1 = -2$ y $s_2 = 2$ ya que:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4} = \frac{1}{(s + 2)(s - 2)} \quad (3.97)$$

Cuando se realimenta unitariamente los polos evolucionan por el eje real hasta encontrarse en el origen y después emigran por el eje imaginario hasta $\pm \infty$.

Las especificaciones demandadas son: $\xi = 0,55$ y $t_p = 2,1$ por lo que:

$$t_p = 2,1 \text{ s} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \omega_n = 1,79 \text{ rad/s} \quad (3.98)$$

La ecuación característica del sistema compensado en lazo cerrado tendrá que ser:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.99)$$

es decir:

$$s^2 + 1,97s + 3,21 = 0 \quad (3.100)$$

Los polos en lazo cerrado del sistema compensado deberán estar en:

$$s_{1,2} = 0,985 \pm j1,496 \quad (3.101)$$

Se emplea un compensador PD que cancele el polo situado en el semiplano derecho por lo que su función de transferencia será:

$$G_c(s) = K_c \frac{s - 2}{s + \omega_p} \quad (3.102)$$

y la ganancia de lazo del sistema compensado será:

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_c}{(s + \omega_p)(s + 2)} \quad (3.103)$$

En la figura 3.16 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-55,85^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 124,15^\circ \quad (3.104)$$

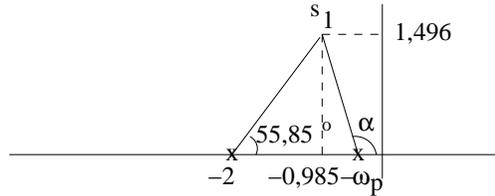


Figura 3.16: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de ω_p será:

$$\begin{aligned} \tan(180^\circ - \alpha) &= \tan(180^\circ - 124,15^\circ) = \frac{1,496}{0,985 - \omega_p} = 1,47 \\ \omega_p &= 0 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (3.105)$$

El valor de K_c se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación s_1 :

$$\begin{aligned} |G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| &= 1 \\ \left| \frac{K_c}{(s_1 + \omega_p)(s_1 + 2)} \right| &= \left| \frac{K_c}{s_1(s_1 + 2)} \right| = \frac{K_c}{3,24} = 1 \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$K_c = 3,24$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 3,24 \frac{s - 2}{s} \quad (3.107)$$

b) Regulador y método utilizado

El regulador es del tipo PD y se ha empleado el método de cancelación. En la práctica cancelar un polo en el semiplano derecho no da buenos resultados ya que es prácticamente imposible coincidir con el polo realmente y además se puede desajustar con el tiempo.

3.6. Problema 6

Un sistema de control con realimentación unitaria presenta una función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s - 3)} \quad (3.108)$$

Con objeto de estabilizar el sistema y que la respuesta ante una entrada escalón cumpla las especificaciones:

$$M_p = 20,78\% \text{ y } t_s|_{2\%} = 3s \quad (3.109)$$

se realiza una compensación en cascada mediante un regulador con función de transferencia $G_c(s)$.

- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la bisectriz
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de cancelación cero-polo
- Elegir de forma razonada el regulador más conveniente de los calculados en los apartados anteriores.

Solución

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,2078 = 1,57 \quad \xi = 0,446 \quad (3.110)$$

y del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 3 = \frac{4}{0,446\omega_n} \quad \omega_n = 2,98 \text{ rad/s} \quad (3.111)$$

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.112)$$

y sustituyendo los valores de ξ y ω_n :

$$s^2 + 2,658s + 8,88 = 0 \quad (3.113)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:

$$s_{1,2} = -1,33 \pm j2,66 \quad (3.114)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.115)$$

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \frac{1}{(s + 2)(s - 3)} \quad (3.116)$$

a) Método de la bisectriz

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado $s_1 = -1,33 + j2,66$ se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.17

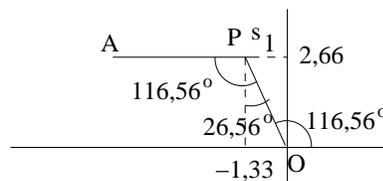


Figura 3.17: Ángulo del que hay que hallar la bisectriz

2.- Se traza la bisectriz PB y se hallan los ángulos de interés como se indica en la figura 3.18

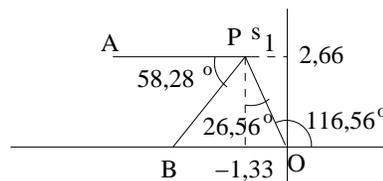


Figura 3.18: Bisectriz PB

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador

El polo en lazo cerrado s_1 ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.117)$$

Es decir:

$$\angle \frac{1}{(s_1 + 2)(s_1 - 3)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.118)$$

$$\angle \frac{1}{(s_1 + 2)(s_1 - 3)} = -\tan^{-1} \frac{2,66}{2 - 1,33} - (180^\circ - \tan^{-1} \frac{2,66}{3 + 1,33}) = -75,86^\circ - 148,43^\circ = -224,29^\circ \quad (3.119)$$

por lo que:

$$\phi = 224,29^\circ - 180^\circ = 44,29^\circ \quad (3.120)$$

4.- A cada lado de la bisectriz, se trazan las rectas que forman con ella un ángulo de $\phi/2 = 22,14^\circ$ como se indica en la figura 3.19

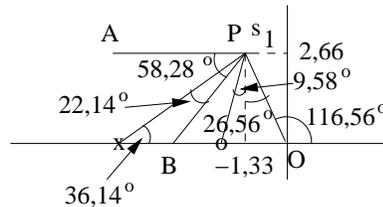


Figura 3.19: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

$$\tan 36,14^\circ = \frac{2,66}{\omega_p - 1,33} \quad (3.121)$$

$$\omega_p = 1,33 + \frac{2,66}{\tan 36,14^\circ} = 4,97 \text{ rad/s} \quad (3.122)$$

y el cero en:

$$\tan 9,58^\circ = \frac{\omega_z - 1,33}{2,66} \quad (3.123)$$

$$\omega_z = 2,66 \tan 9,58^\circ + 1,33 = 1,78 \text{ rad/s} \quad (3.124)$$

6.- La ganancia del compensador se obtiene de la condición de módulo que ha de cumplir el polo $s_1 = -1,33 + j2,66$:

$$\left| K_c \frac{s_1 + 1,78}{s_1 + 4,97} \frac{1}{(s_1 + 2)(s_1 - 3)} \right| = 1 \quad K_c = 23,1 \quad (3.125)$$

La función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = 23,1 \frac{s + 1,78}{s + 4,97} \quad (3.126)$$

b) Cancelación de polo

El cero del compensador ω_z cancelará el polo del semiplano derecho, es decir $\omega_z = 3$:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s-3}{s+\omega_p} \frac{1}{(s+2)(s-3)} = \frac{K_c}{(s+2)(s+\omega_p)} \quad (3.127)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.128)$$

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.129)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.130)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.130, es decir, que el módulo de $G_c(s)G(s)H(s)$ sea la unidad (condición de amplitud) y su fase $\pm 180^\circ$ (condición de fase).

En la figura 3.20 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-75,86^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 104,14^\circ \quad (3.131)$$

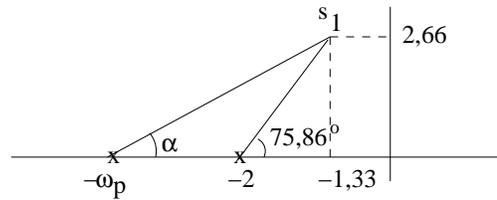


Figura 3.20: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

Como $\alpha > 90^\circ$ el polo estará situado a la derecha de $-1,33$.

El valor de ω_p será:

$$\begin{aligned} \tan(180^\circ - \alpha) &= \tan 75,86^\circ = \frac{2,66}{\omega_p + 1,33} = 3,97 \\ \omega_p &= 0,66 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (3.132)$$

El valor de K_c se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación s_1 :

$$\begin{aligned} |G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| &= 1 \\ \left| \frac{K_c}{(s_1 + \omega_p)(s_1 + 2)} \right| &= \left| \frac{K_c}{(-1,33 + j2,66 + 0,66)(-1,33 + j2,66 + 2)} \right| = \frac{K_c}{7,54} = 1 \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$K_c = 7,54$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = \frac{7,54(s-3)}{s+0,66} \quad (3.134)$$

c) Elección del compensador

Como la cancelación de un polo en el semiplano derecho es muy inestable es mejor el regulador obtenido con el método de la bisectriz.

3.7. Problema 7

Dado un sistema cuyo lugar de las raíces aparece en la figura 3.21:

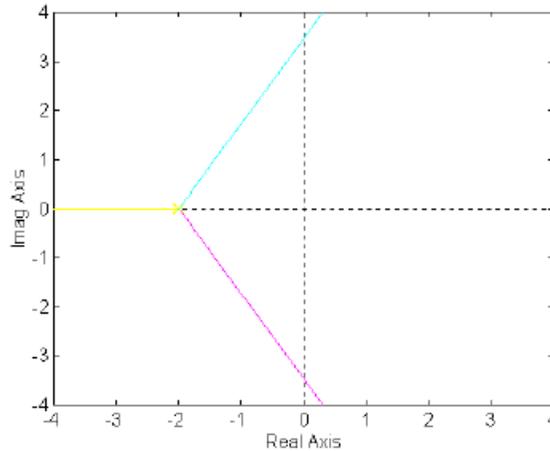


Figura 3.21: Lugar de las raíces

Se sabe que dos de sus polos en lazo cerrado se encuentran sobre el eje imaginario. Diseñar un regulador PDI para que se cumplan las siguientes especificaciones:

$$M_p(\%) = 12,3\% \quad t_s(2\%) = 2s \quad \text{Error estático de posición} \leq 5\% \quad (3.135)$$

Solución

Si el lugar de las raíces es como el indicado en la figura 3.21 es que tiene tres polos y como arranca de $s=-2$ la ganancia de lazo abierto será de la forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)^3} \quad (3.136)$$

Si en lazo cerrado sin compensar tiene dos de sus raíces en el eje imaginario alguna fila del criterio de Routh ha de ser nula y entonces la fila auxiliar proporciona las raíces en el eje imaginario. La ecuación característica es:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (s+2)^3 + K = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + K = 0 \quad (3.137)$$

y el criterio de Routh sería:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 12 \\ s^2 & 6 & 8+K \\ s^1 & \frac{72-8-K}{6} & 0 \\ s^0 & 8+K & \end{array}$$

La fila de s^1 es nula si $K = 64$ por lo que:

$$G(s)H(s) = \frac{64}{(s+2)^3} \quad (3.138)$$

y las dos raíces imaginarias estarán en:

$$6s^2 + 72 = 0 \quad s_{1,2} = \pm j2\sqrt{3} \quad (3.139)$$

y la raíz real:

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 72 = (s^2 + 12)(s + 6) \quad s_3 = -6 \quad (3.140)$$

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,123 = -2,09 \quad \xi = 0,553 \quad (3.141)$$

y del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 2 = \frac{4}{0,553\omega_n} \quad \omega_n = 3,6 \text{ rad/s} \quad (3.142)$$

En lazo cerrado la ecuación característica del sistema compensado tendrá que ser:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.143)$$

y sustituyendo los valores de ξ y ω_n :

$$s^2 + 4s + 13 = 0 \quad (3.144)$$

por lo que los polos en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -2 \pm j3 \quad (3.145)$$

Estos polos no pertenecen al lugar de las raíces sin compensar.

Partimos de un compensador PD por adelanto de fase ideal. La función de transferencia sería:

$$G_{PD}(s) = K_D(s + \omega_{zd}) \quad (3.146)$$

En la figura 3.22 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-3 \cdot 90^\circ + \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 90^\circ \quad (3.147)$$

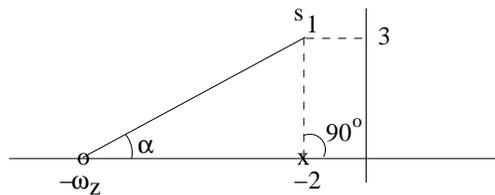


Figura 3.22: Condición de fase del polo con compensador PD ideal en lazo cerrado

El valor de ω_{zd} sería $\omega_{zd} = 2$

El valor de K_D se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación $s_1 = -2 + j3$:

$$|G_{PD}(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| K_D(s_1 + \omega_{zd}) \frac{64}{(s_1+2)^3} \right| = \left| \frac{64K_D}{(s_1+2)^2} \right| = \frac{64K_D}{27} = 1 \quad (3.148)$$

$$K_D = 0,4218$$

La función de transferencia de la ganancia de lazo del sistema compensado será:

$$G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{27}{(s+2)^2} \quad (3.149)$$

Como el error estático de posición es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \leq 0,05 \quad K_p \geq 19 \quad (3.150)$$

y en nuestro caso:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{27}{4} = 6,75 < 19 \quad (3.151)$$

por lo que el regulador no cumple todas las especificaciones dadas.

Se añade en cascada un nuevo compensador PI, cuya función de transferencia es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_{zi}}{s + \frac{\omega_{zi}}{\beta}} \quad (3.152)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{\text{pespecificado}}}{K_p} = \frac{19}{6,75} = 2,8148 \quad (3.153)$$

El polo es dominante respecto al cero al ser β veces más pequeño. El cero se suele colocar una década por debajo del primer polo, por ejemplo, en $\omega_{zi} = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ rad/s}$ y el polo en $\frac{\omega_{zi}}{\beta} = 0,071 \text{ rad/s}$. La condición de módulo se calcula teniendo en cuenta que el módulo de $G_{PD}(s)G(s)H(s)$ ya se había conseguido que fuera la unidad por lo que la condición completa se seguiría cumpliendo si:

$$\left| K_I \frac{s_1 + 0,2}{s_1 + 0,071} \right| = 1 \quad (3.154)$$

y como $s_1 = -2 + j3 \gg 0,2 \gg 0,071$ entonces $K_I = 1$.

Si el retardo de fase introducido está entre 0° y 5° los polos no estarán lejos de los desados $s_{1,2}$. En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1 + 0,2}{s_1 + 0,071} = -1,77^\circ < 0^\circ \quad (3.155)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,2}{s + 0,071} \quad (3.156)$$

La ganancia de lazo total será:

$$G_{PDI}H(s) = G_{PD}(s)G_{PI}(s)G(s)H(s) = \frac{27(s+0,2)}{(s+0,071)(s+2)^2} \quad (3.157)$$

y el coeficiente de error de posición será:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{PDI}(s)H(s) = \frac{27 \cdot 0,2}{0,071 \cdot 2^2} = 19,01 > 19 \quad (3.158)$$

3.8. Problema 8

Se desea que el sistema con realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+5)} \quad (3.159)$$

cuyo lugar de las raíces aparece en la figura 3.23:

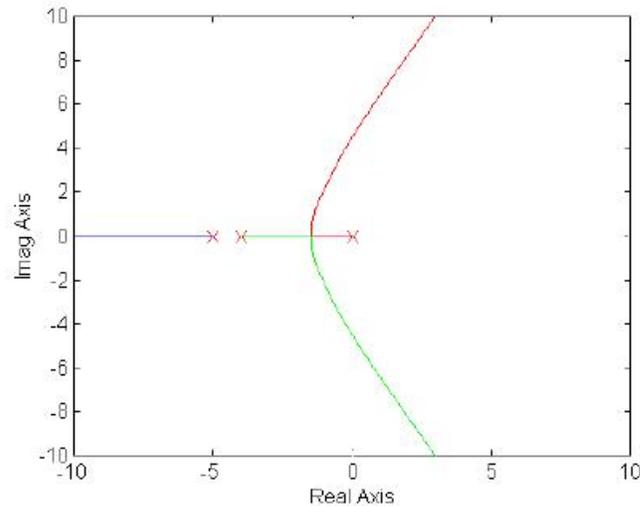


Figura 3.23: Lugar de las raíces sin compensar

cumpla las siguientes especificaciones:

$$M_p(\%) = 9,5\% \quad t_s(2\%) = 2s \quad \text{Error estático de velocidad} \leq 1/3 \quad (3.160)$$

Para tal fin, se diseñará un regulador PID en dos etapas:

- 1.- Un regulador PD ideal para cumplir las especificaciones del régimen transitorio.
- 2.- Un regulador PI modificado para cumplir las especificaciones de régimen permanente.

El regulador PID buscado será la asociación en cascada de los dos reguladores diseñados anteriormente.

Se pide:

- a) Función de transferencia del regulador PD ideal.
- b) Sin representar el nuevo lugar de las raíces, obtener la función de transferencia del regulador PI modificado.

Solución

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,095 = -2,35 \quad \xi = 0,6 \quad (3.161)$$

y del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 2 = \frac{4}{0,6\omega_n} \quad \omega_n = 3,3 \text{ rad/s} \quad (3.162)$$

Los polos dominantes en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2 \pm j2,67 \quad (3.163)$$

Estos polos no pertenecen al lugar de las raíces sin compensar.

a) Regulador PD ideal

La función de transferencia será:

$$G_{PD}(s) = K_D(s + \omega_{zd}) \quad (3.164)$$

En la figura 3.24 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-41,67^\circ - 53,16^\circ - 126,83^\circ + \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 41,66^\circ \quad (3.165)$$

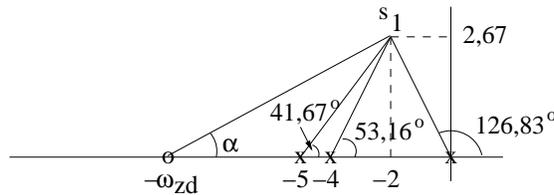


Figura 3.24: Condición de fase del polo con compensador PD ideal en lazo cerrado

El valor de ω_{zd} sería:

$$\tan 41,66^\circ = \frac{2,67}{\omega_{zd} - 2} \quad \omega_{zd} \simeq -5 \text{ rad/s} \quad (3.166)$$

El valor de K_D se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación $s_1 = -2 + j2,67$:

$$|G_{PD}(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| K_D(s_1 + 5) \frac{1}{s_1(s_1+4)(s_1+5)} \right| = \left| \frac{K_D}{s_1(s_1+4)} \right| = \frac{K_D}{11,1289} = 1 \quad (3.167)$$

$$K_D = 11,1289$$

La función de transferencia de la ganancia de lazo del sistema compensado con el PD ideal será:

$$G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{11,1289}{s(s+4)} \quad (3.168)$$

Como el error estático de velocidad es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \leq \frac{1}{3} \quad K_v \geq 3 \quad (3.169)$$

y en nuestro caso:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{11,1289}{4} = 2,78 < 3 \quad (3.170)$$

por lo que el regulador PD no cumple todas las especificaciones dadas.

b) Regulador PI modificado

Se añade en cascada un nuevo compensador PI, cuya función de transferencia es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_{zi}}{s + \frac{\omega_{zi}}{\beta}} \quad (3.171)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{\text{especificado}}}{K_v} = \frac{3}{2,78} = 1,078 \quad (3.172)$$

El polo es dominante respecto al cero al ser β veces más pequeño. El cero se suele colocar una década por debajo del primer polo, por ejemplo, en $\omega_{zi} = 4 \cdot 0,1 = 0,4 \text{ rad/s}$ y el polo en $\frac{\omega_{zi}}{\beta} = 0,371 \text{ rad/s}$. La condición de módulo se calcula teniendo en cuenta que el módulo de $G_{PD}(s)G(s)H(s)$ ya se había conseguido que fuera la unidad por lo que la condición completa se seguiría cumpliendo si:

$$\left| K_I \frac{s_1 + 0,4}{s_1 + 0,371} \right| = \frac{K_I}{0,9952} = 1 \quad K_I \simeq 1 \quad (3.173)$$

Si el retardo de fase introducido está entre 0° y 5° los polos no estarán lejos de los desados $s_{1,2}$. En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1 + 0,4}{s_1 + 0,371} = -0,4557^\circ < 0^\circ \quad (3.174)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,4}{s + 0,371} \quad (3.175)$$

La ganancia de lazo total será:

$$G_{PDI}H(s) = G_{PD}(s)G_{PI}(s)G(s)H(s) = \frac{11,1289(s+5)(s+0,4)}{s(s+4)(s+5)(s+0,371)} \quad (3.176)$$

y el coeficiente de error de velocidad será:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{PDI}(s)H(s) = \frac{11,1289 \cdot 5 \cdot 0,4}{4 \cdot 5 \cdot 0,371} = 3 \quad (3.177)$$

con lo que se cumplen todas las especificaciones.

3.9. Problema 9

Diseñar un regulador PI modificado para que el sistema con realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)} \quad (3.178)$$

cumpla las siguientes especificaciones:

$$M_p(\%) = 20\%$$

Error en régimen permanente ante una entrada $r(t) = tu(t)$ menor o igual que 5%

$$(3.179)$$

Solución

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,2 = -1,61 \quad \xi = 0,4559 \quad (3.180)$$

La ecuación característica es $1 + G(s)H(s) = 0$ que conduce a:

$$1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0 \quad s^2 + 2s + K = 0 \quad (3.181)$$

Identificando con:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.182)$$

y teniendo en cuenta que $\xi = 0,4559$ resulta:

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= 2 & \omega_n &= 2,2 \text{ rad/s} \\ K &= \omega_n^2 = 4,84 \end{aligned} \quad (3.183)$$

Los polos dominantes en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1 \pm j1,95 \quad (3.184)$$

El error en régimen permanente ante una entrada rampa es el error de velocidad que sin compensar vale:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= 1/K_v \\ K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+2)} = \frac{K}{2} = 2,42 \end{aligned} \quad (3.185)$$

La función de transferencia del regulador PI es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_z}{s + \frac{\omega_z}{\beta}} \quad (3.186)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{\text{especificado}}}{K_v} \quad (3.187)$$

El error en régimen permanente ante una entrada rampa, del sistema compensado, es el error de velocidad que ha de valer $e_{ss} = 1/K_{\text{especificado}} \leq 0,05$, es decir, $K_{\text{especificado}} \geq 20$, por lo tanto:

$$\beta = \frac{20}{2,42} = 8,26 \quad (3.188)$$

y por otro lado:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{PI}(s)G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sK_I \frac{s + \omega_z}{s + \frac{\omega_z}{\beta}} \frac{K}{s(s+2)} = \frac{K_I \cdot K}{2} \beta \geq 20 \quad (3.189)$$

por lo que la condición del error se traduce a que:

$$K_I \geq \frac{20 \cdot 2}{K\beta} = \frac{40}{4,84 \cdot 8,26} = 1 \quad (3.190)$$

El cero se toma una década por debajo del polo situado en $2 \text{ rad/s } \omega_z = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ rad/s}$ y el polo en $\frac{\omega_z}{\beta} = \frac{0,2}{8,26} = 0,024 \text{ rad/s}$. De la condición de módulo se calcula K_I :

$$\left| K_I 4,84 \frac{s_1 + 0,2}{s_1(s_1 + 2)(s_1 + 0,024)} \right|_{s_1 = -1 + j1,95} = \frac{10,2K_I}{10,5} = 1 \quad K_I = \frac{10,5}{10,2} = 1,03 > 1 \quad (3.191)$$

Puede tomarse $K_I \simeq 1$.

Si el retardo de fase introducido está entre 0° y 5° los polos no estarán lejos de los desados $s_{1,2}$. En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \left/ \frac{s_1 + 0,2}{s_1 + 0,024} \right/ = -4,3^\circ < 0^\circ \quad (3.192)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,2}{s + 0,024} \quad (3.193)$$

3.10. Problema 10

Dado el sistema con realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)} \quad (3.194)$$

diseñar un regulador PI para que se cumplan las siguientes especificaciones:

Polos dominantes con $\xi = 0,5$

Error en régimen permanente ante una entrada $r(t) = tu(t)$ menor o igual que $0,4$

Solución

Sin compensar, la ecuación característica es $1 + G(s)H(s) = 0$ que conduce a:

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+3)} = 0 \quad s(s+1)(s+3) + K = 0 \quad s^3 + 4s^2 + 3s + K = 0 \quad (3.195)$$

Habría que dibujarse el lugar geométrico de esta ecuación y ver que ganancia K le corresponde a $\xi = 0,5$ teniendo en cuenta que $\cos\beta = \xi = 0,5$ $\beta = 60^\circ$, como se indica en la figura 3.25.

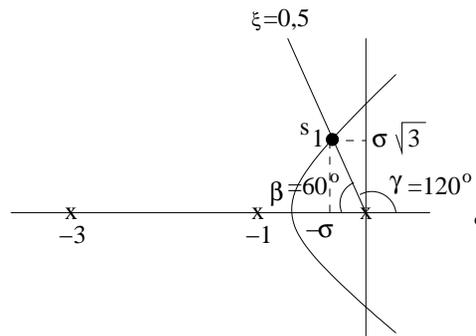


Figura 3.25: Lugar con $\xi = 0,5$

En este caso también se puede hacer analíticamente. El lugar geométrico con $\gamma = 180^\circ - \beta = C^{te} = 120^\circ$ tiene por ecuación $s = -\sigma + j\sigma\sqrt{3}$. El punto de corte con el lugar geométrico se encontrará resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} s^3 + 4s^2 + 3s + K &= 0 \\ s &= -\sigma + j\sigma\sqrt{3} \end{aligned} \quad (3.196)$$

o lo que es lo mismo:

$$(-\sigma + j\sigma\sqrt{3})^3 + 4(-\sigma + j\sigma\sqrt{3})^2 + 3(-\sigma + j\sigma\sqrt{3}) + K = 0 \quad (3.197)$$

y desarrollando e igualando la parte real y la parte imaginaria a cero:

$$\begin{aligned} 8\sigma^3 - 8\sigma^2 - 3\sigma + K &= 0 \\ 3\sigma\sqrt{3} - 8\sigma^2\sqrt{3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.198)$$

De la segunda ecuación $\sigma = 3/8 = 0,375$ y sustituyendo en la primera $K = 1,83$.

Cuando se compense con el PI los polos dominantes en lazo cerrado, prácticamente, no se van a modificar por lo que estarán:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\sigma\sqrt{3} = -0,375 \pm j0,65 \quad (3.199)$$

El error en régimen permanente ante una entrada rampa es el error de velocidad, que sin compensar vale:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= 1/K_v \\ K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+1)(s+3)} = \frac{1,83}{3} = 0,61 \end{aligned} \quad (3.200)$$

La función de transferencia del regulador PI es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_z}{s + \frac{\omega_z}{\beta}} \quad (3.201)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{vespecificado}}{K_v} \quad (3.202)$$

El error de velocidad, del sistema compensado, ha de valer $e_{ss} = 1/K_{vespecificado} \leq 0,4$, es decir, $K_{vespecificado} \geq 2,5$, por lo tanto:

$$\beta = \frac{2,5}{0,61} = 4 \quad (3.203)$$

y por otro lado:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{PI}(s)G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sK_I \frac{s + \omega_z}{s + \frac{\omega_z}{\beta}} \frac{K}{s(s+1)(s+3)} = \frac{K_I \cdot K}{3} \beta \geq 2,5 \quad (3.204)$$

por lo que la condición del error se traduce a que:

$$K_I \geq \frac{2,5 \cdot 3}{K\beta} = \frac{7,5}{1,83 \cdot 4} = 1,02 \quad (3.205)$$

El cero se toma una década por debajo del polo situado en 1 rad/s $\omega_z = 1 \cdot 0,1 = 0,1 \text{ rad/s}$ y el polo en $\frac{\omega_z}{\beta} = \frac{0,1}{4} = 0,025 \text{ rad/s}$.

De la condición de módulo se calcula K_I :

$$\left| K_I K \frac{s_1 + 0,1}{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 3)(s_1 + 0,025)} \right|_{s_1 = -0,375 + j0,65} = \frac{K_I}{1,04} = 1 \quad K_I = 1,04 > 1,02 \quad (3.206)$$

Si el retardo de fase introducido está entre 0° y 5° los polos no estarán lejos de los desados $s_{1,2}$. En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ \not< \angle \frac{s_1 + 0,1}{s_1 + 0,025} = -5,3^\circ < 0^\circ \quad (3.207)$$

Esta condición no se cumple por lo que es necesario retocar la situación del cero. Se selecciona $\omega_z = 0,05 \text{ rad/s}$ y el polo en $\frac{\omega_z}{\beta} = \frac{0,05}{4} = 0,0125 \text{ rad/s}$.

De la condición de módulo se calcula K_I :

$$\left| K_I K \frac{s_1 + 0,05}{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 3)(s_1 + 0,0125)} \right|_{s_1 = -0,375 + j0,65} = \frac{K_I}{1,02} = 1 \quad K_I = 1,02 \geq 1,02 \quad (3.208)$$

y el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1 + 0,05}{s_1 + 0,0125} = -2,6^\circ < 0^\circ \quad (3.209)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = 1,02 \frac{s + 0,05}{s + 0,0125} \quad (3.210)$$

3.11. Problema 11

Un sistema de control de posición angular, que utiliza un servomotor DC controlado por armadura, tiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 4)} \quad (3.211)$$

y su realimentación es unitaria. Diseñar un regulador PD ideal para que se cumplan las siguientes especificaciones ante una entrada escalón:

Error de posición: $e_{ss} < 0,1\%$.

Sobreimpulso máximo: $M_p = 4,32\%$.

Tiempo de establecimiento (2%): $t_s = 0,42 \text{ s}$.

Solución

Cálculo de K

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,0432 = -3,14 \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad (3.212)$$

La ecuación característica del sistema sin compensar es:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad s(s + 4) + K = 0 \quad s^2 + 4s + K = 0 \quad (3.213)$$

e identificando con:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.214)$$

se obtiene: $\omega_n = 2\sqrt{2} \text{ rad/s}$ y $K = \omega_n^2 = 8$.

También se podría haber calculado sabiendo que el ángulo que corresponde a $\xi = 0,707 = \cos\beta$ es $\beta = 45^\circ$ y por lo tanto el lugar geométrico de $\xi = 0,707$ tiene por ecuación $s = -\sigma + j\sigma$. El punto de corte con el lugar geométrico de nuestro problema se hallaría resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} s^2 + 4s + K &= 0 \\ s &= -\sigma + j\sigma \end{aligned} \quad (3.215)$$

que conduce a:

$$(-\sigma + j\sigma)^2 + 4(-\sigma + j\sigma) + K = 0 \quad -j2\sigma^2 - 4\sigma + j4\sigma + K = 0 \quad (3.216)$$

e igualando la parte real y la parte imaginaria a cero:

$$\begin{aligned} -2\sigma^2 + 4\sigma &= 0 & \sigma &= 2 \\ -4\sigma + K &= 0 & K &= 8 \end{aligned} \quad (3.217)$$

es decir, $s_{11} = -\sigma + j\sigma = -2 + j2$

Gráficamente se indica en la figura 3.26

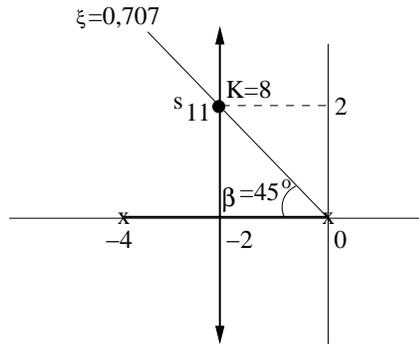


Figura 3.26: Lugar geométrico sin compensar y valor de K para $\xi = 0,707$

Otra forma de hallar K es viendo que el punto s_{11} pertenece al lugar de las raíces y que por tanto tendrá que cumplir la condición de módulo:

$$\left| \frac{K}{s_{11}(s_{11} + 4)} \right| = 1 \quad (3.218)$$

y sustituyendo el valor de s_{11} :

$$\left| \frac{K}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} \right| = 1 \quad K = 8 \quad (3.219)$$

Del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural del sistema compensado:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 0,42 = \frac{4}{0,707\omega_n} \quad \omega_n = 13,47 \text{ rad/s} \quad (3.220)$$

Los polos dominantes en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -9,52 \pm j9,52 \quad (3.221)$$

Estos polos no han de pertenecer al lugar geométrico anterior, lo que se comprueba fácilmente mediante la condición de ángulo obtenida de la figura 3.27.

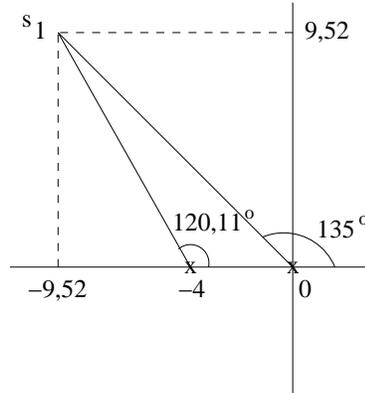


Figura 3.27: Comprobación de que los polos del sistema compensado no pertenecen al lugar geométrico sin compensar

$$-135^\circ - 120,11^\circ = 104,99^\circ \neq 180^\circ \quad (3.222)$$

PD ideal

La función de transferencia será:

$$G_{PD}(s) = K_D(s + \omega_z) \quad (3.223)$$

En la figura 3.28 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase del sistema compensado:

$$-135^\circ - 120,11^\circ + \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 75,11^\circ \quad (3.224)$$

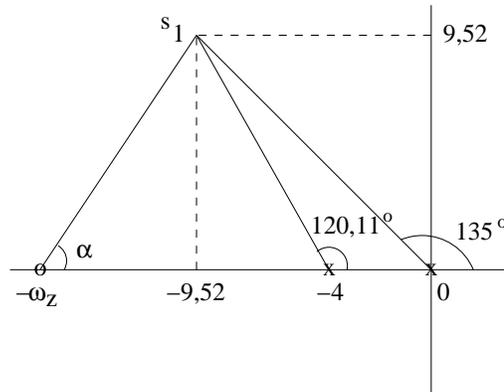


Figura 3.28: Condición de fase del polo, con compensador PD ideal en lazo cerrado

El valor de ω_z sería:

$$\tan 75,11^\circ = \frac{9,52}{\omega_z - 9,52} \quad \omega_z = 12 \text{ rad/s} \quad (3.225)$$

El valor de K_D se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación $s_1 = -9,52 + j9,52$:

$$\left| K_D(s_1 + 12) \frac{8}{s_1(s_1 + 4)} \right| = 10,2K_D = 1 \quad K_D = 1,88 \quad (3.226)$$

La función de transferencia de la ganancia de lazo del sistema compensado con el PD ideal será:

$$G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{1,88 \cdot 8(s + 12)}{s(s + 4)} = \frac{15(s + 12)}{s(s + 4)} \quad (3.227)$$

Como el error estático de posición es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \leq 10^{-3} \quad K_p \geq 999 \quad (3.228)$$

y en nuestro caso:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{PD}(s)G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{15(s + 12)}{s(s + 4)} = \infty \quad (3.229)$$

por lo que el regulador PD cumple todas las especificaciones dadas.

3.12. Problema 12

Se desea diseñar un PID para la planta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} \quad (3.230)$$

sintonizándolo por Ziegler-Nichols, de modo que el sobreimpulso no exceda del 25 %.

a) Calcular teóricamente los valores de K_{cr} y P_{cr} y escribir la función de transferencia del PID

b) Diseñar en Simulink un controlador proporcional de ganancia K_{cr} para que el sistema, en lazo cerrado, oscile

c) Visualizar el periodo de oscilación P_{cr}

d) Visualizar la respuesta al escalón, en lazo cerrado, del sistema controlado con el PID y medir el sobreimpulso

e) Efectuar un ajuste posterior para cumplir la especificación de un sobreimpulso menor del 25 %

Solución

a) La función de transferencia en lazo cerrado con un controlador proporcional de ganancia K_{cr} sería:

$$\frac{K_{cr}G(s)}{1 + K_{cr}G(s)} = \frac{K_{cr}}{s(s^2 + 2s + 1) + K_{cr}} \quad (3.231)$$

La ecuación característica es:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + K_{cr} = 0 \quad (3.232)$$

y la tabla de Routh:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & K_{cr} \\ s^1 & \frac{2-K_{cr}}{2} & \\ s^0 & K_{cr} & \end{array} \quad (3.233)$$

El sistema oscilará cuando:

$$\frac{2 - K_{cr}}{2} = 0 \quad K_{cr} = 2 \quad (3.234)$$

y la pulsación de oscilación se deduce de:

$$\begin{aligned} s^3 + 2s^2 + 2s + 2 &= 0 \\ (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 2 &= 0 \\ -j\omega^3 - 2\omega^2 + j\omega + 2 &= 0 \\ (2 - 2\omega^2) + j\omega(1 - \omega^2) &= 0 \\ \omega &= 1 \end{aligned} \quad (3.235)$$

El periodo de oscilación es:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = 6,28 \quad (3.236)$$

Con estos valores los parámetros del PID son:

$$\begin{aligned} K_p &= 0,6K_{cr} = 1,2 \\ T_i &= 0,5P_{cr} = 3,19 \\ T_d &= 0,125P_{cr} = 0,79 \end{aligned} \quad (3.237)$$

y su función de transferencia:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 1,2 + \frac{0,376}{s} + 0,948s = \frac{0,956(s + 0,626)^2}{s} \quad (3.238)$$

b) La respuesta de la planta en lazo abierto, a una entrada escalón, es la de la figura 3.29.

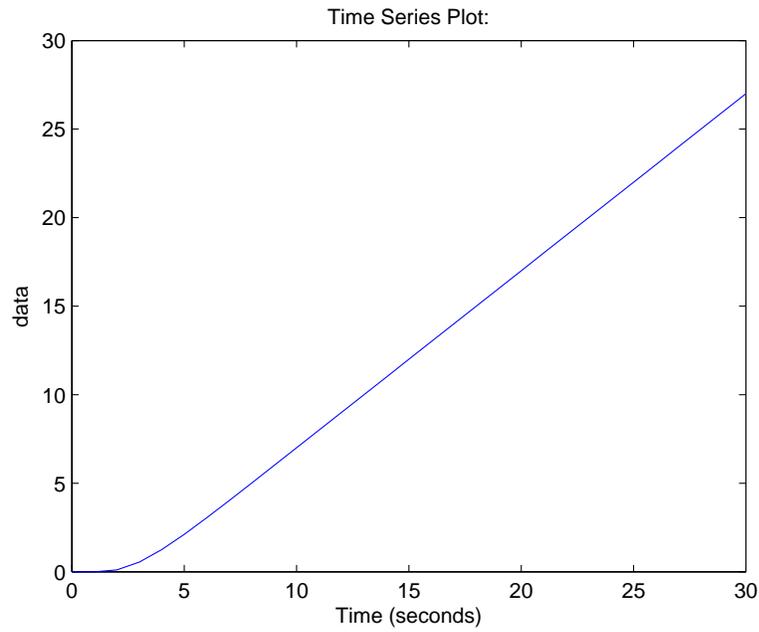


Figura 3.29: Respuesta al escalón de la planta en lazo abierto

Puede explicarse, fácilmente, teniendo en cuenta que el polo dominante está en el origen y que por tanto se comporta como un integrador y la integral de una constante es una recta. La ganancia K_{cr} que hace que el sistema de la figura 3.30 oscile, es $K_{cr} = 2$.

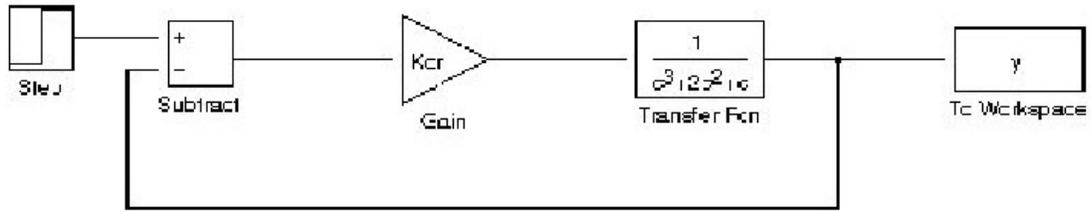


Figura 3.30: Controlador proporcional para que oscile

c) En este caso la señal de salida es la indicada en la figura 3.31

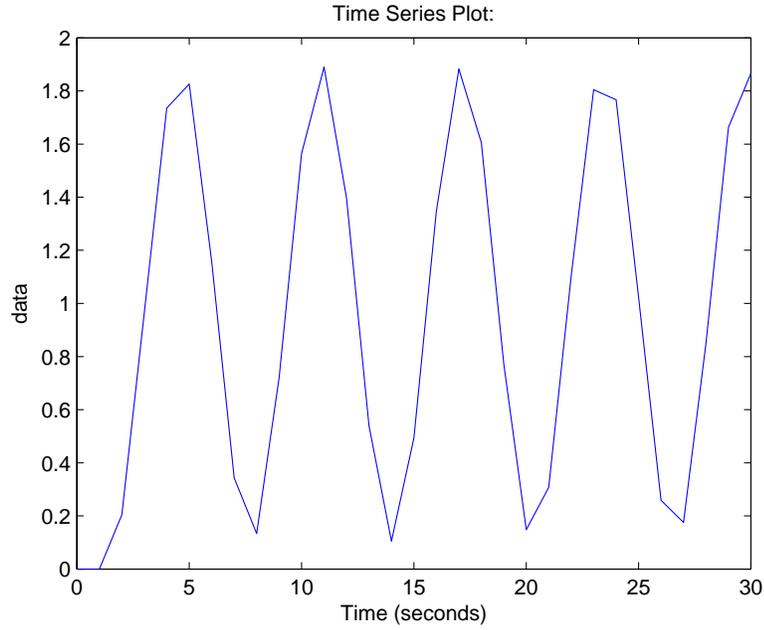


Figura 3.31: Oscilación mediante la ganancia $K_{cr} = 2$

El valor del periodo de oscilación es de $P_{cr} = 6,28$

d) El diagrama de bloques con el controlador PID es el de la figura 3.32

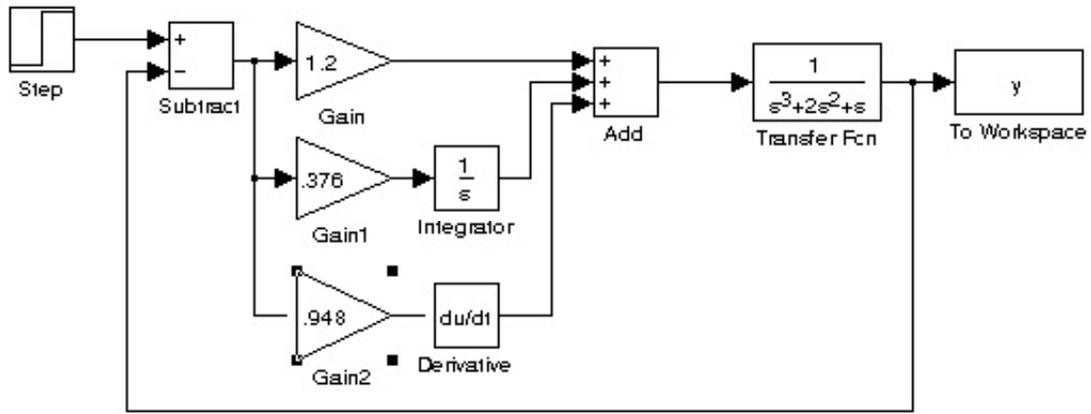


Figura 3.32: Controlador PID

y la señal de salida se indica en la figura 3.33

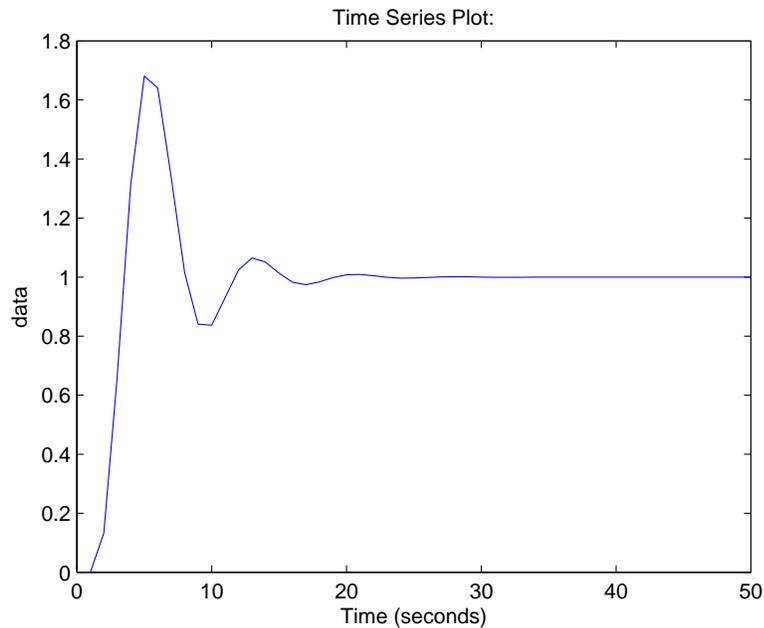


Figura 3.33: Salida con el PID

El sobreimpulso se acerca al 70 %.

e) Desplazando los ceros del PID hacia la derecha, para neutralizar el polo dominante de la planta que se encuentra en el origen, se consigue un sobreimpulso menor. Desplazándolos, por ejemplo, a $s = -0,3$ resulta:

$$G_c(s) = \frac{0,956(s + 0,3)^2}{s} = 0,5736 + \frac{0,086}{s} + 0,956s \quad (3.239)$$

y sustituyendo estos valores en el diagrama de la figura 3.32 se obtiene la salida de la figura 3.34. En este caso el sobreimpulso se acerca al 25 %

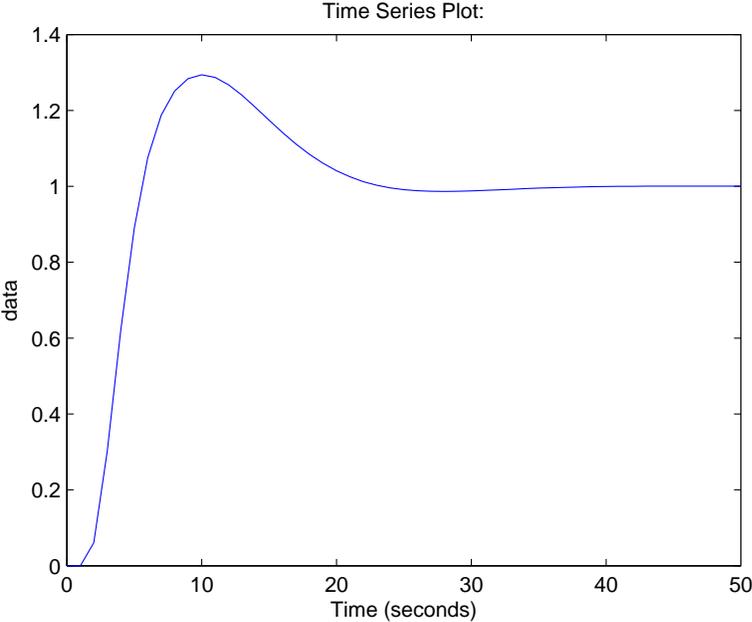


Figura 3.34: Ajuste final del PID