Conjuntos y Números

LISTA 2 CURSO 2019-20

1) Para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq k \leq n$, se define el número combinatorio $\binom{n}{k}$ como el número de subconjuntos de k elementos en un conjunto X que tenga n elementos.

A partir de la definición, demostrar las siguientes propiedades:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, d) $\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$,

e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, es decir, el conjunto X tiene en total 2^n subconjuntos.

2) Utilizar la definición de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Derivar k veces esa igualdad y evaluarla en $x = 0$ para demostrar que se tiene la siguiente expresión algebraica para los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Deducir la fórmula general del binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

3) ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles suprayectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Comenzar comprobando que todas ellas son funciones y que lo son entre los conjuntos que se indican).

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m) = m + 2$;
b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(m) = 2m - 7$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$;
d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + 4x$;
e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n(n+1)$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;
g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n + 1$;
h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(t) = t/(t+1)$.

4) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2x + 1/2| - 1/2$, hallar su imagen y también $f(\mathbb{Z})$. Demostrar que f no es ni sobreyectiva ni inyectiva. Probar que, sin embargo, sí da una biyección entre $\mathbb{Z}$ y su imagen.

5) Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos para cada subconjunto $A \subset Y$ la imagen inversa:

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X \mid f(x) \in A \}.$$

Dados subconjuntos $Z, W \subset Y$, demostrar que

a) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$
b) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$
c) $f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z$
d) $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$

6) Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = \{(n+1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar})\}$ para $A \subset \mathbb{N}$. Estudiar si la función es inyectiva y/o sobreyectiva. ¿Quién es $f^{-1}(\varnothing)$?

7) Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{1\} \longrightarrow P = \{primos\}$ las funciones definidas por

$f(n) =$ `el mayor primo que divide a` n

$g(n) =$ `el menor primo que divide a` n.

a) Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.

b) ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?

8) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Dibujar los gráficos de las funciones f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.

b) Encontrar las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decidir si son inyectivas y/o suprayectivas.

9) Dadas funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, probar las siguientes afirmaciones:

a) f inyectiva y g inyectiva $\quad \Rightarrow g \circ f$ inyectiva.

b) f sobre y g sobre $\quad \Rightarrow g \circ f$ sobre.

c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.

d) Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

e) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f, y es sobre si y sólo si lo es f.

f) Si además $X = Z$, la afirmación del apartado anterior también es cierta para $f \circ g$.

10) Sean A y B dos conjuntos finitos de m y n elementos respectivamente.

a) Hallar el número de funciones $f : A \longrightarrow B$.

b) Hallar el número de funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$.

11) Sea X un conjunto finito con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$? ¿Cuántas funciones hay de X en $X \times X$?

12) Utilizar el `principio de inclusión-exclusión` para responder a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuántos números naturales coprimos con 1000 hay entre 1 y 1000?

(b) ¿Cuántos números naturales coprimos con 360 hay entre 1 y 360?

13) En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y los han dejado en un paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria.

a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que ninguno se quede con el suyo?

b) Responder a la misma pregunta para el caso de n personas y n paraguas.

14) Demostrar que dados n enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no necesariamente distintos, existen enteros k y l con $0 \leq k < l \leq n$ tales que la suma $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ es un múltiplo de n.