

Conjuntos y Números

LISTA 1

CURSO 2019-20

- 1) Halla una expresión para la suma de los primeros números naturales positivos: $1 + 2 + \dots + n$. Y otra para la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética: $a + kd$, $k = 0, 1, \dots$
- 2) Halla la suma de las n primeras potencias de r : $r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1}$. Halla una fórmula general para la suma de las n primeros términos de una progresión geométrica cr^k , $k = 0, 1, \dots$
- 3) Encuentra una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados.
Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman π radianes.
- 4) Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número natural n sea divisible por 6.
 - a) n es divisible por 3;
 - b) n es divisible por 12;
 - c) $n = 24$;
 - d) n^2 es divisible por 6;
 - e) n es par y divisible por 3;
 - f) n es par o divisible por 3.
- 5) Escribir el enunciado de la afirmación recíproca y de la contraposición de la siguiente afirmación: *Si estudio mucho y el examen resulta fácil, obtendré buena nota.*
- 6) Explica por qué son equivalentes las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$, $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$, y confírmalo con la tabla de verdad de cada una de ellas.
- 7) En las siguientes proposiciones, x , y son números reales. Traduce cada una de ellas a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.
 - a) $\forall x ((x > 0) \Rightarrow \exists y ((y > 0) \wedge (y^2 = x)))$
 - b) $\exists x \forall y ((y > x) \Rightarrow (y > 5))$
 - c) $\exists x (1 < x^2 < x)$
 - d) $\forall y \exists x ((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1))$
- 8) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.
 - a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.
 - b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.
- 9) Razona con palabras por qué los siguientes pares de afirmaciones no son equivalentes en los números naturales, y explica cuáles de ellas son ciertas.
 - a) $\forall x \exists y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ y $\exists x \forall y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$.
 - b) $\exists x \forall y, x < y < x + 2$ y $\forall x \exists y, x < y < x + 2$.
- 10) ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones en los números naturales? Escribir su negación.
 - a) $\forall x \exists y, y < x$
 - b) $\exists x \forall y, \forall z, x < z < y$
- 11) a) Demuestra por reducción al absurdo que $\log_3(1215)$ es irracional.
b) Demostrar por reducción al absurdo que los números

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

son irracionales. (Sugerencia: si x es racional, también lo es su cuadrado.)

- 12) Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma a^2 donde a es un número natural. Demuestra que si un número natural $n > 0$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ no puede ser un cuadrado perfecto.
- 13) Demostrar por inducción:
- a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
- b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
- c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
- 14) a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 2$, entonces $2^n > 1 + 2n$.
- b) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 4$, entonces $2^n > n^2 + 1$.
- c) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $a_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.
- 15) Sean $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 7$ y $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Utilizando inducción, demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la fórmula
- $$a_n = 1 + 2^n + 2(-1)^n.$$
- 16) Probar por inducción que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.
- 17) Demostrar que $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- 18) Demostrar, para todo $q \neq 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad
- $$(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \dots (1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}} - 1}{q - 1}.$$
- 19) Supongamos que $A \subset B \subset C$. Determinar $A \setminus B, A \setminus C$ y $A \cup B$.
- 20) Para cada número natural n , sea $A_n = [-\frac{2}{n+1}, \frac{4n-1}{3n}]$. Determinar $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
- 21) Probar las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios S, T, U y V .
(Indicación: los diagramas de Venn pueden ser útiles para orientarse, pero la demostración no debe depender de ellos).
- a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$
- b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$
- c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
- d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$
- e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$
- 22) Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{P}(S)$ de partes de $S = \{a, b, 1, 2\}$. Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Concluir que $S = T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$.
- 23) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
- $$\{e\} \subset \{e, \{e^2\}\}, \quad \emptyset \subset \{e, \{\emptyset\}\}.$$
- 24) Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones:
- a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$; b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.
- 25) Sean A, B, C conjuntos dados tales que $B \subset A$. Describir en cada caso los conjuntos X que satisfacen las ecuaciones:

i) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$, si sabemos que $A \subset C$.

ii) $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$, si sabemos que $A \cap C = \emptyset$.