

Hoja 7

1.- Calcular la integral del campo $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y, x + xy + y^2)$ a lo largo de la circunferencia unidad con la orientación positiva, primero empleando la definición de integral de línea y después empleando el teorema de Green.

2.- Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (5x^{3/2}e^{y^2}, 4yx^{5/2}e^{y^2} + 5y^2)$$

a lo largo de la curva descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = 2\theta^3$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

3.- Dados los puntos $A = (2, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 0)$ y $D = (0, -1)$ de \mathbb{R}^2 , considérese el camino Γ formado por el arco AB de la circunferencia de centro C y los segmentos orientados BD, DO, OA (O es el origen de coordenadas). Calcular la integral

$$\int_{\Gamma} (x^4 - x^3e^x - y) dx + (x - y \arctan y) dy.$$

4.- Hallar la integral de

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

a lo largo de la circunferencia centrada de radio r con la orientación positiva. Hallar también

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y explicar por qué esto no contradice el Teorema de Green.

5.- Transformar la integral de superficie

$$\int \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4 .

6.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0$,

$$\int_C y dx + z dy + x dz = \pi R^2 \sqrt{3}.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 0, \quad \int_C y^2 dx + xy dy + xz dz = 0.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $x/a + z/b = 1$, con $a, b > 0$,

$$\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz = 2\pi a(a + b).$$

7.- Para cada uno de los campos vectoriales que siguen, determinar un potencial, cuando el campo sea un campo conservativo,

a) $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, -(y + z), x - y)$.

b) $\vec{F}(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$.

c) $\vec{F}(x, y, z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$.

8.- Sea S la superficie cerrada formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq 1/2$. Calcular $\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$\vec{F} = (xz + e^{y \operatorname{sen} z}, 2yz + \cos xz, -z^2 + e^x \cos y).$$

9.- Hallar la integral del campo

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1 + z^2), y + \operatorname{sen} \sqrt{1 + x^2 + z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

10.- Hallar la integral de superficie

$$\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{siendo} \quad \vec{F} = (y - z, z - x, x - y),$$

cuando S es el hemisferio norte de la esfera unidad orientada hacia el exterior. *Resultado:* 0.

11.- Sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

a) Directamente.

b) Mediante el teorema de la divergencia.