Hoja 4 – Variables aleatorias multidimensionales

1.- Estudiar si

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x+2y \geq 1, \\ 0, & \text{si } x+2y < 1, \end{cases}$$

es una función de distribución en $\mathbb{R}^2$.

2.- Dada la variable aleatoria 2-dimensional (X,Y) tal que

$$P(X=1,Y=0) = P(X=0,Y=1) = P(X=1,Y=1) = \frac{1}{3},$$

calcular la función de distribución conjunta de (X,Y) y las funciones de distribución marginales de X e Y.

3.- Sea (X,Y) una variable aleatoria 2-dimensional con distribución uniforme sobre el recinto

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{x}{3}, x \leq 3, y \geq 0\right\}.$$

Calcular la función de densidad conjunta de (X,Y), la función de distribución conjunta de (X,Y) y las distribuciones marginales de X e Y.

4.- Dada la variable aleatoria 2-dimensional (X,Y) con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{-1}\operatorname{sen}(x+y), & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq \pi/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

calcular:

(4.a) Las esperanzas de X e Y.

(4.b) La matriz de varianza-covarianzas de (X, Y).

5.- Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad $f(x, y) = 24y(1 - x - y)$ sobre el recinto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Calcular:

(5.a) La función de distribución conjunta.

(5.b) Las funciones de densidad marginales.

(5.c) Las funciones de densidad condicionadas.

6.- Se sitúan de forma aleatoria e independiente N puntos en el intervalo $(0, T)$. Si X representa la distancia de 0 al primer punto e Y denota la distancia de 0 al segundo punto, entonces calcular la distribución conjunta y las correspondientes marginales de (X, Y).

7.- La probabilidad de que desde un huevo nazca un insecto es p. En una flor, el número de huevos puestos por estos insectos sigue una distribución Poisson de media λ.

(7.a) Calcular la distribución del número de insectos que nace en una flor.

(7.b) Se ha observado una flor y se ha constatado que el número de insectos que han nacido en ella ha sido n. Calcular la distribución del número de huevos que había en la flor.

8.- Sea ξ una variable aleatoria discreta con función de masa

$$p(x) = \frac{1}{2^x}, \quad x = 1, 2, ...$$

Supongamos que $\eta/\xi = x$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y/x) = x(1 - y)^{x-1}, \quad 0 < y < 1.$$

Determinar la distribución de η.

9.- Sea X una variable aleatoria con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Supongamos que $Y/X = x$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y/x) = \begin{cases} xy^{-(x+1)}, & \text{si } y > 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcular:

(9.a) La función de densidad conjunta.

(9.b) La función de densidad marginal de Y.

(9.c) La función de densidad de $X/Y = y$.

10.- Se considera la variable aleatoria 2-dimensional (ξ, η), donde ξ sigue una distribución Poisson de parámetro λ y $\eta/\xi = x$ sigue una distribución Normal de media $x^2 - 2x$ y varianza σ^2. Calcular la esperanza de η y la matriz de varianza-covarianzas.

11.- Calcular la matriz de varianza-covarianzas de la variable aleatoria 2-dimensional con función característica

$$\phi(t, u) = \frac{9e^{3i(t+2u)-(t^2+4u^2)/2}}{(3 - it)^2}.$$

12.- Se considera la variable aleatoria 2-dimensional (ξ, η) con función de masa

$$\begin{aligned} P(-1,-1) &= \frac{1}{16}, \quad P(-1,0) = \frac{3}{16}, \quad P(-1,1) = 0, \\ P(0,-1) &= \frac{1}{16}, \quad P(0,0) = \frac{1}{4}, \quad P(0,1) = \frac{3}{16}, \\ P(1,-1) &= \frac{1}{8}, \quad P(1,0) = \frac{1}{16}, \quad P(1,1) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Demostrar que $\phi_{\xi+\eta}(t) = \phi_\xi(t)\phi_\eta(t)$ y mostrar que, sin embargo, ξ y η no son independientes.

13.- Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se considera la transformación (Y_1, Y_2), donde $Y_1 = \max\{X_1, X_2\}$ e $Y_2 = \min\{X_1, X_2\}$. Calcular la función de densidad de (Y_1, Y_2).

14.- Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad uniforme en el recinto

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Calcular las distribuciones de Z y (Z, T), donde $Z = X + Y$ y $T = X - Y$.

15.- Sea (ξ_1, ξ_2) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Hallar la distribución conjunta de (η_1, η_2), donde $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ y $\eta_2 = \max\{\xi_1, \xi_2\}$.

16.- Se consideran las variables aleatorias X e Y independientes, donde $X \sim Uniforme(1, 3)$ e Y tiene función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2^{-1}e^{2-y}, & \text{si } y > 2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcular:

(16.a) La distribución conjunta de (Z, W), donde $Z = X/Y$ y $W = XY$.

(16.b) La distribución marginal de Z.

17.- Sean $X_1, ..., X_{n+1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución Bernoulli de parámetro p. Sean

$$V_n = \prod_{i=1}^{n} X_i \quad \text{y} \quad V_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} X_i.$$

Calcular la distribución conjunta de (V_n, V_{n+1}), su función característica y deducir si V_n y V_{n+1} son o no independientes.

18.- Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Calcular la distribución de $T = |X - Y|$.

19.- Sea (ξ_1, ξ_2) una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2^{-1}e^{-x_1}, & \text{si } x_1 > 0, -1 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Hallar la distribución de la variable aleatoria $\eta = |\xi_1 + \xi_2|$.

20.- Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} k^2 e^{-ky}, & \text{si } 0 < x < y, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(20.a) Hallar la probabilidad del recinto $[0, 1] \times [0, 1]$.

(20.b) Determinar los valores de k para que f sea una función de densidad.

(20.c) Demostrar que X e $Y - X$ son independientes.

(20.d) Escribir la curva (general) de regresión y la recta de regresión de Y sobre X.

21.- Consideremos la variable aleatoria 2-dimensional (X, Y) con distribución uniforme en el recinto limitado por las rectas $y = x$, $x = -y$, $y = 1$ e $y = -1$; es decir, $f(x, y) = 1/2$ para $(x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| < 1\}$.

(21.a) Calcular la curva (general) de regresión de Y sobre X.

(21.b) Estudiar si X e Y con independientes y/o incorreladas.

22.- Consideremos las variables aleatorias X e Y, con rectas de regresión

$$\begin{cases} 3x + 2y - 26 = 0, \\ 6x + y - 31 = 0. \end{cases}$$

Calcular las medias marginales y el coeficiente de correlación. Identificar cuál es la recta de regresión de Y sobre X.

23.- Se considera una variable aleatoria (X, Y) con distribución $Normal_2$. Se sabe que las rectas de regresión tienen por ecuaciones $x - y + 2 = 0$, $3x - 10y + 40 = 0$; y que la suma de las varianzas de X e Y es 1.3. Determinar la correspondiente función de densidad.