HOJA DE EJERCICIOS 3
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1.

a) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $a \in X$. Demuestra que la siguiente función es continua:

$$d_a : X \to \mathbb{R}, \qquad d_a(x) = d(x, a) \ .$$

b) Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demuestra que la norma es continua.

Problema 2. Sea $\big((x_j, y_j) \big)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^2$. Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, demuestra que

$$(x_j, y_j) \to (a, b) \quad \text{en} \quad (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \iff \left\{ \begin{array}{l} x_j \to a \\ y_j \to b \end{array} \right.$$

Generalízalo a $\mathbb{R}^n$.

Problema 3. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| < 1\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leq 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| = 1\} \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \geq 1\}.$$

Problema 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $x \in X$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Problema 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Recordemos la función dist del Problema 9 de la Hoja 1.
Dado $E \subseteq X$, demuestra:
a) $x \in \overline{E}$ si y sólo si $\operatorname{dist}(x, E) = 0$
b) x es exterior a E si y sólo si $\operatorname{dist}(x, E) > 0$.
c) x es interior a E si y sólo si $\operatorname{dist}(\, x \, , \, X \setminus E \,) > 0$.

Problema 6. Sea (X, d) un espacio métrico. Recordemos la función dist del Problema 9 de la Hoja 1. Sea $A \subseteq X$ compacto no vacío. Demuestra que para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$.

Problema 7. Sea $1 < p < \infty$. Demuestraque para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_p \leq \|v\|_1 \leq n \, \|v\|_{\infty} \, .$$

Indicación: puede ser de ayuda el ejercicio 5 de la Hoja 1.

Problema 8. Sea $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio normado, sea $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $T : \mathbb{R}^n \to F$ una aplicación lineal. Demuestra que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ tal que $\|T\| = \|Tx_0\|_F$.

Problema 9. En $\mathbb{R}^n$, consideremos $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Demuestra lo siguiente:

a) Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2e_1, 1)$ y $\overline{B}(0, 1) \cup \overline{B}(3e_1, 1)$ no son conexos por caminos.

b) Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2e_1, 1) \cup \{e_1\}$ y $\overline{B}(0, 1) \cup \overline{B}(3e_1, 1) \cup \{te_1 : 1 < t < 2\}$ son conexos por caminos.

Problema 10. Demostrar que, en $\mathbb{R}$, el complementario de $[0, 1]$ no es conexo por caminos, pero en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, el complementario de $[0, 1]^n$ sí es conexo por caminos.

Problema 11. Sea X conexo por caminos y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. ¿Qué se puede decir de f si $f(X) \subset \mathbb{Z}$? ¿Y si $f(X) \subset \mathbb{Q}$? ¿Y si $f(X) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Problema 12.

a) Sea X conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua no constante. Demuestra que $f(X)$ es no numerable.

b) Demuestra que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Problema 13. Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sean $A, B \subset \mathbb{V}$. Se define $A + B = \{a + b \colon a \in A, \, b \in B\}$.

a) Prueba que si A es compacto y B es cerrado entonces $A + B$ es cerrado.

b) Pon un ejemplo de un espacio $\mathbb{V}$ y de dos conjuntos cerrados A y B tales que $A + B$ no es cerrado.
