Hoja 3 – Variables aleatorias unidimensionales

1.- Sean $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ y $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicación.

(1.a) Demostrar que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$, $f^{-1}(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ y $f^{-1}(\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

(1.b) Demostrar que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

2.- Sea una urna con 3 bolas blancas, 2 negras y 1 verde. Se extraen 3 bolas al azar y se considera ξ definida como el "número de bolas blancas extraídas". Construir la función de probabilidad inducida por ξ y su función de distribución.

3.- Sea Ω el espacio muestral asociado al lanzamiento de una moneda equilibrada en tres ocasiones, con puntos muestrales denotados por ω_{ijk} con $i, j, k \in \{C, X\}$. Sea

$$\mathcal{A} \quad = \quad \{\phi, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$$

una σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega)$, donde $A_1 = \{\omega_{ccx}, \omega_{cxc}\}$, $A_2 = \Omega - (A_1 \cup A_3)$ y $A_3 = \{\omega_{xxx}\}$. Sea $X(\omega)$ el "número de caras obtenidas en el resultado ω". Estudiar si X es una variable aleatoria.

4.- Sean $\Omega = \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$, $\forall \omega \in \Omega$. Se define $\xi(\omega)$ como el "resto de ω (módulo k)". Demostrar que ξ es una variable aleatoria y determinar los valores $P(\xi = r)$, para $r \in \{0, 1, ..., k-1\}$.

5.- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ una función Riemann-integrable tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$. Demostrar que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ define una función de distribución absolutamente continua.

6.- La duración T de las conferencias telefónicas en una central es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} \alpha e^{-kt}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \quad (k > 0)$$

(6.a) Calcular α para que f sea función de densidad.

(6.b) Si $1/k = 2$ minutos, calcular la probabilidad de que una conversación dure más de 3 minutos.

(6.c) Probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.

7.- Sea F la función definida por

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1/3, \\ x^{2\alpha - 1}, & \text{si } 1/3 \leq x < \alpha, \\ 1, & \text{si } \alpha \leq x. \end{cases}$$

(7.a) Determinar los valores de α para que F sea función de distribución.

(7.b) Determinar α para que F sea discreta. Análogo para el caso absolutamente continuo.

(7.c) Calcular $P(\liminf A_n)$ y $P(\limsup A_n)$ cuando $A_n = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^{n+1}}, \alpha\right)$.

8.- Sea

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ (x+1)/10, & \text{si } 1 \leq x < 3/2, \\ 1/3 + (x - 3/2)/3, & \text{si } 3/2 \leq x < 5/2, \\ 1, & \text{si } 5/2 \leq x. \end{cases}$$

(8.a) Comprobar que F es función de distribución. Determinar las funciones de distribución F_1 discreta y F_2 absolutamente continua tales que $F(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda) F_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(8.b) Evaluar $P_F(\mathbb{Q})$ y $P_F(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

(8.c) Dada la sucesión de subconjuntos

$$\begin{aligned} A_{2n-1} \quad &= \quad \left(\frac{1}{n+1}, \frac{5n+2}{n+1} \right), \\ A_{2n} \quad &= \quad \left(\frac{4n+3}{n}, \frac{8n+1}{n+1} \right), \end{aligned}$$

se pide evaluar $P(\liminf A_n)$ y $P(\limsup A_n)$.

9.- Demostrar que la función

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - 2^{-x-1} - 2^{-[x]-1}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

es una función de distribución de tipo mixto, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

10.- Sea la función de densidad de una variable aleatoria X con distribución Cauchy

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinar la distribución de la variable aleatoria $Y = 3X + 1$.

11.- Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1, \\ 0.2(x+1), & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 0.3, & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ 0.3 + 2(x-0.5)^2, & \text{si } 1/2 \leq x < 1, \\ 0.9 + 0.2(x-1), & \text{si } 1 \leq x < 3/2, \\ 1, & \text{si } 3/2 \leq x. \end{cases}$$

(11.a) Comprobar que F es función de distribución. Determinar las funciones de distribución F_1 discreta y F_2 absolutamente continua tales que $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(11.b) Determinar la distribución de $Y = |X|$.

12.- Sea X una variable aleatoria exponencial de tasa $\lambda = 1$. Se define $Y = X^2$ si $0 \leq X < 2$, $Y = 4$ si $2 \leq X < 3$, $Y = -4(X-4)$ si $3 \leq X < 4$, e $Y = 0$ si $4 \leq X$. Determinar la distribución de Y.

13.- Sea X una variable aleatoria discreta con soporte $\mathcal{D}_X$ y función de masa p_X. Sean $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible e $Y = g(X)$ la variable aleatoria transformada. Demostrar que Y es una variable aleatoria discreta con soporte $\mathcal{D}_Y = g(\mathcal{D}_X)$ y función de masa

$$p_Y(y) = \sum_{\{x \in \mathbb{R}: g(x)=y\} \cap \mathcal{D}_X} p_X(x), \quad \text{si } y \in \mathcal{D}_Y.$$

14.- Sea $(\mathbb{R}, \beta, P)$ un espacio de probabilidad, siendo P la medida de probabilidad relativa a la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -3, \\ \frac{x+3}{4}, & \text{si } -3 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Sean las variables aleatorias $\xi_1 = X^2$, $\xi_2 = X^3$ y $\xi_3 = e^{-X}$, supuesto que X es una variable aleatoria con función de distribución F. Calcular las funciones de distribución inducidas por cada una de ellas.

15.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} kx + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(15.a) Determinar los valores de k tales que f es una función de densidad.

(15.b) Calcular la esperanza, la moda y la mediana de X.

(15.c) ¿Para qué valores de k es máxima la varianza de X?

16.- Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1+2x^2}{6}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Calcular $E[X]$ y $Var(X)$.

17.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

la función de densidad de una variable aleatoria X y sea $Y = -2 \ln X$. Calcular la distribución de Y.

18.-

(18.a) Determinar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X discreta con momentos $E[X^n] = \frac{1}{n+1}$.

(18.b) Determinar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X uniforme sobre el intervalo (a, b).

(18.c) Se sabe que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X discreta viene dada por

$$M(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^t}, \quad \alpha \in (0,1).$$

Determinar la función de masa de X.

19.- Dada la función

$$\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}},$$

se pide:

(19.a) Comprobar que φ es la función característica de una variable aleatoria X discreta y hallar la función de masa, la media y la varianza de X.

(19.b) Escribir la función característica de $Y = 1 + 2X$, así como su media y su varianza.

(19.c) Si $Y_1 = (Y+2)^2$ e $Y_2 = X^2+5$, calcular $P(Y_1 \in [10, 50])$ y $P(Y_2 \in [6, 10])$.

20.- Determinar la función característica de las variables aleatorias que cumplen:

(20.a) Toda la probabilidad está concentrada en un punto.

(20.b) Toda la probabilidad está concentrada en n puntos.

21.- Demostrar que $\varphi(t) = \frac{sent}{t}$ es la función característica de una variable aleatoria.

22.- El porcentaje de piezas defectuosas fabricadas por una máquina es el 4%. Las piezas se empaquetan en lotes de 100. El cliente rechaza el lote si contiene más de dos piezas defectuosas. Calcular el porcentaje de lotes rechazados que puede esperar el fabricante si el proceso de fabricación no ha sufrido modificaciones.

23.- En dos grupos de segundo año de carrera se ha medido el coeficiente de inteligencia de los alumnos. En el grupo A la media fue 100 y la desviación típica 10, mientras que en el grupo B estas medidas fueron 105 y 12, respectivamente. Supongamos que ambos grupos tienen el mismo número de alumnos. Se escoge un alumno al azar y se comprueba que su coeficiente es mayor que 120. Calcular, suponiendo normalidad, la probabilidad de que el citado alumno pertenezca al grupo B.