Hoja 2 – Probabilidad

1.- Sean Ω un espacio muestral y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra. Para $A \in \mathcal{A}$ fijado, se define

$$\mathcal{A}_A = \{B \subset \Omega : B = A \cap C \text{ con } C \in \mathcal{A}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{P}(A)$ es σ-álgebra.

2.- Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión monótona decreciente, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra. Demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ y que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.

3.- Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión convergente, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra. Demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ y que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.

4.- Sean $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega_1)$ y $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ dos σ-álgebras, y sea $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Demostrar que $E_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$, para cada $\omega_1 \in \Omega_1$, y que $E^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$, para cada $\omega_2 \in \Omega_2$.

5.- Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra y $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión. Demostrar las siguientes desigualdades:

(5.a) $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$.

(5.b) $\limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n)$.

Además, resolver el ejercicio 3 desde (5.a) y (5.b).

6.- Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio probabilizable y $\{P_n : n \geq 1\}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Se define $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ por

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(A),$$

donde $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Demostrar que P es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

7.- Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ el espacio probabilizable con $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Demostrar que las funciones de conjunto P dadas en (7.a) y (7.b) son medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ y determinar las probabilidades de los conjuntos de (7.c).

(7.a) $P(A) = \sum_{x \in A} e^{-\lambda} \lambda^x / x!$, siendo $\lambda > 0$.

(7.b) $P(A) = \sum_{x \in A} p(1-p)^x$, siendo $p \in (0, 1)$.

(7.c) $A = \{x > 2\}$, $B = \{x < 3\}$, $C = \{3 < x < 6\}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cap C^c$ y $B \cap C^c$.

8.- Sean $\mathbb{N}_p$ y $\mathbb{N}_i$ los conjuntos de números naturales pares e impares, respectivamente. Se define la familia de subconjuntos

$$\mathcal{C} \quad = \quad \{A \cup \mathbb{N}_i : A \subset \mathbb{N}_p\}.$$

Estudiar si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene estructura de álgebra.

9.- Demostrar que $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ finito o } A^c \text{ finito}\}$ tiene estructura de álgebra, pero no es una σ-álgebra de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

10.- Sean $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$ y $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega : 2n \in A \text{ si y sólo si } 2n + 1 \in A\}$. Demostrar que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra.

11.- Sean Ω un conjunto no-numerable y $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega : A \text{ o } A^c \text{ es numerable}\}$. Estudiar si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra.

12.- De los 30 temas de un examen, un alumno conoce 18 temas. Se proponen dos tipos de examen:

1. Se eligen 3 temas al azar y el alumno debe contestar 2.
2. Se eligen 5 temas al azar y el alumno debe contestar 3.

Determinar el tipo de examen más favorable al alumno.

13.- Calcular la probabilidad de que, al tirar una moneda n veces, obtengamos la k-ésima cara en la n-ésima tirada.

14.- Se tiene un manojo de N llaves donde sólo una de ellas abre una puerta. Suponiendo que cada llave probada es retirada del manojo, determinar la probabilidad de que la puerta se abra en el k-ésimo intento. (Nota: todas las llaves deben ser probadas, por lo que es necesario hacer N intentos.) Determinar la probabilidad de este suceso cuando las llaves no se retiran del manojo.

15.- En una urna se introducen n bolas, cada una de ellas de color blanco o negro con igual probabilidad. Se extraen k bolas con reemplazamiento desde la urna. Determinar la probabilidad de que la urna sólo contenga bolas blancas si las k bolas extraídas han sido blancas.

16.- Se consideran $N+1$ urnas idénticas numeradas desde 0 hasta N, conteniendo N bolas. En concreto, la i-ésima urna contiene i bolas negras y $N-i$ bolas blancas, para $0 \leq i \leq N$. Se escoge una urna al azar y se extraen n bolas una-a-una con reemplazamiento. Si las n bolas extraídas resultan ser negras, determinar la probabilidad de que, al extraer la $(n+1)$-ésima bola, ésta sea de color negro.

17.- De una urna con a bolas blancas y b bolas negras se extraen k bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las k bolas haya exáctamente r bolas blancas?

18.- Se lanzan 2 dados n veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un 6 doble?

19.- Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes, 2 amarillas y 4 blancas. Se extraen 8 bolas al azar. Calcular la probabilidad de que:

(19.a) Exactamente sean 2 rojas, 2 verdes, 1 amarilla y 3 blancas.

(19.b) Estén todas las bolas blancas.

(19.c) Haya, al menos, una bola roja.

20.- Con una moneda se juega a cara o cruz. Se suspenden los lanzamientos cuando por primera vez la diferencia entre el número de caras y el número de cruces es, en valor absoluto, igual a 3. Calcular la probabilidad de que los lanzamientos se suspendan en la sexta tirada o antes.

21.- Los jugadores A, B y C participan en el siguiente juego: se lanza un dado y A gana si sale 1 ó 3; B gana si sale 4 ó 5; C gana si sale 6; y si sale 2 se vuelve a lanzar el dado. Calcular la probabilidad de que gane A, de que gane C y de que gane B.

22.- Una urna contiene 5 bolas negras y 4 blancas, otra urna contiene 4 bolas negras y 5 blancas. Supongamos que se trasladan 2 bolas de la primera a la segunda urna y, a continuación se extrae una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

23.- Se sabe que al lanzar cinco monedas aperecieron al menos dos caras. ¿Cuál es la probabildad de que el número de caras exacto fuese tres?

24.- Disponemos de una moneda y dos dados A y B. A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, y B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda, si sale cara se lanza repetidas veces el dado A y si sale cruz se hace lo mismo con el dado B.

(24.a) Calcular la probabilidad de que en el primer lanzamiento la cara observada sea roja.

(24.b) Sabiendo que en los dos primeros lanzamientos hemos observado dos caras rojas, ¿cuál es la probabilidad de que el dado lanzado sea el A?

25.- Se lanzan dos monedas, si el resultado es CC se extraen dos bolas de una urna U_1 que contiene 3 bolas rojas, 2 blancas y 4 negras. Si el resultado es CX se extraen de U_2 que contiene 2 rojas, 1 blanca y 5 negras, y si sale XX o XC las bolas se extraen de U_3 que contiene 6 rojas, 4 blancas y 6 negras. Si las dos bolas extraídas resultaron ser una blanca y otra roja, ¿cuál es la probabilidad de que sean de U_1? ¿y de U_2?

26.- Determinada batería antiaérea disparaba sobre un avión. Para derribar el aparato bastaba con alcanzar ambos reactores o la cabina del piloto. Sean p_1 la probabilidad de alcanzar el primer reactor, p_2 la probabilidad de alcanzar el segundo y p_3 la probabilidad de dar en la cabina del piloto. Se supone que estos tres puntos sensibles eran tocados uno independientemente del otro. Determinar la probabilidad de que dicho avión hubiese sido derribado.

27.- El volumen diario de producción de 3 plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 en la segunda y 2000 en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1%, 0.8% y 2% respectivamente, determinar la probabilidad de que

(27.a) Extraída una unidad al azar resulte ser no defectuosa.

(27.b) Habiendo sido extraída una unidad defectuosa, haya sido producida en la primera planta.

28.- Se supone que n bolas se colocan al azar en n cajas numeradas. Calcular las probabilidades de que:

(28.a) La caja 1 esté vacía.

(28.b) Alguna caja esté vacía.

(28.c) La caja 1 sea la única vacía.

(28.d) Hay una única caja vacía.

29.- En un colegio electoral de 42 electores, 15 han votado la lista A y el resto la B. Se seleccionan 10 electores, calcúlese la probabilidad de que, como máximo, tres de ellos hayan votado la lista A.

30.- De una baraja española (40 cartas) repartida en su totalidad entre 4 jugadores, hallar la probabilidad de que haya como mínimo un jugador cuya mano sean cartas todas del mismo palo.

31.- Se tiene una moneda y una urna. Se lanza la moneda al aire. Si sale cara, se introduce una bola negra en la urna; si sale cruz, la bola introducida es de color blanco. El proceso se repite 10 veces. A continuación, se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. El procedimiento se repite 10 veces. Finalizado éste se ha observado que las 10 bolas extraídas eran de color blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna contenga sólo bolas blancas?

32.- Dos de las cuatro válvulas de un aparato, que funcionan independientemente, han fallado. Calcular la probabilidad de que hayan sido la 1 y la 2, si la probabilidad de que falle la válvula i es $i/10$.